

第二部分 组合变形

第七章 应力状态分析 (2)

第八章 强度理论 (1)

第九章 组合变形 (2)

阶段复习与习题课 (1)



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

第七章 应力状态分析

- 应力状态的概念
- 二向应力状态分析—公式解析法
- 二向应力状态分析—图解解析法
- 典型的三向应力状态
- 广义胡克定律
- 平面应力状态下的应变分析*



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院—力学中心

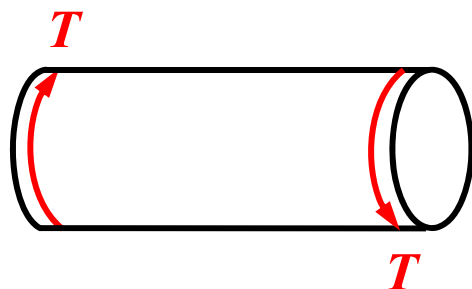
7-1 应力状态的概念

拉压



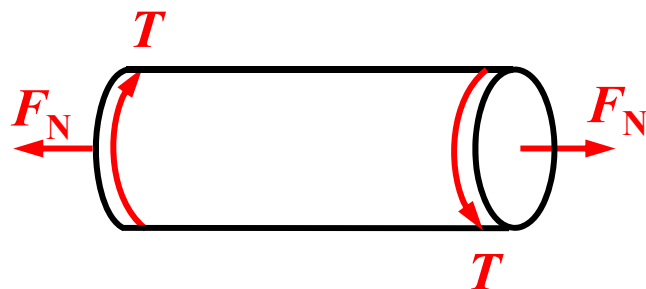
$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$
$$\sigma_{\max} = \sigma \leq [\sigma]$$

扭转



$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho \quad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$$
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]$$

拉压+扭转



问题:

● 最大 σ , τ 是多少?

第七章

● 破坏原因: σ , τ ?

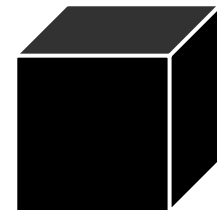
第八章

本章的任务: 从应力已知的截面(横截面)出发, 求其它任意截面的应力, 从而找到最大应力, 为建立强度条件做准备。

7-1 应力状态的概念

应力状态的概念:

- 通过同一点所取截面方向不同，应力的 $大小$ 也不同。应力既是点的位置的函数，也是过该点的截面方位的函数。
- 通过同一点不同方位截面上的应力的集合称为该点的**应力状态(Stress State)**。
- 材料力学中的“点”是物理点，不是几何点，有大小和形状，通常用正六面体表示，称为**单元体 (Element Volume)**。
- 单元体很小，可以认为：
 - (1)各个面上的应力均匀分布；
 - (2)相互平行的平面上，应力大小和性质完全相同。



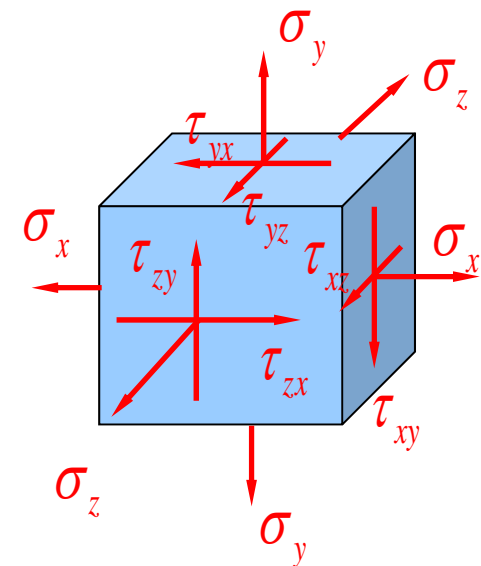
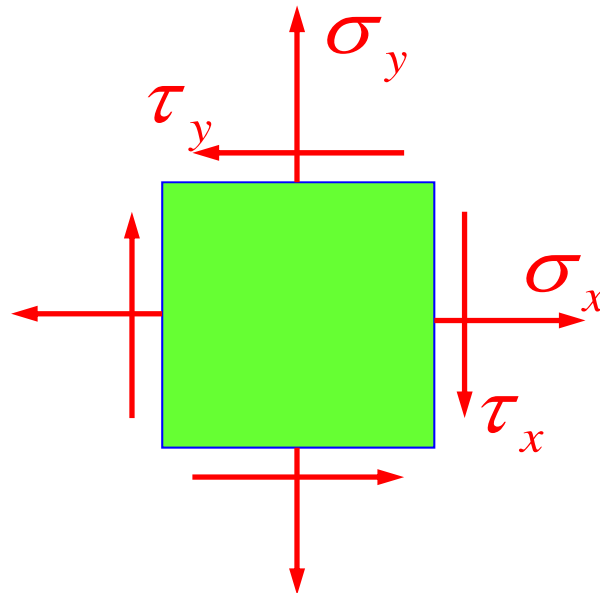
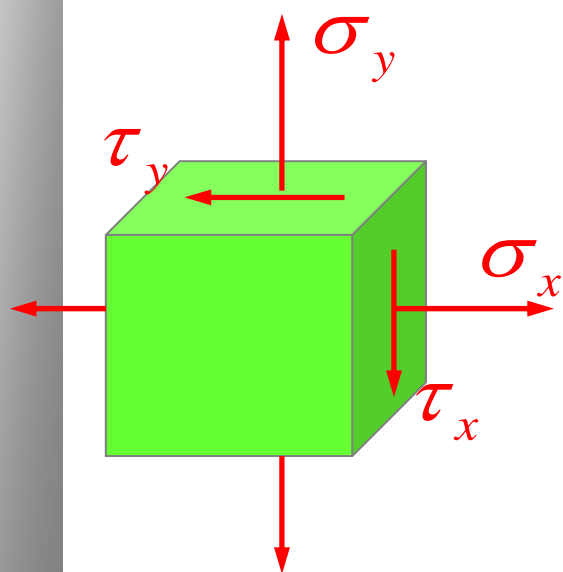
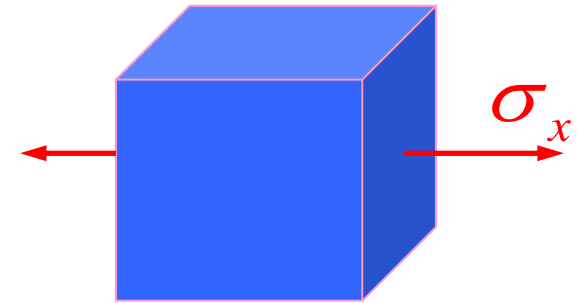
7-1 应力状态的概念

应力状态的分类：（不严格定义）

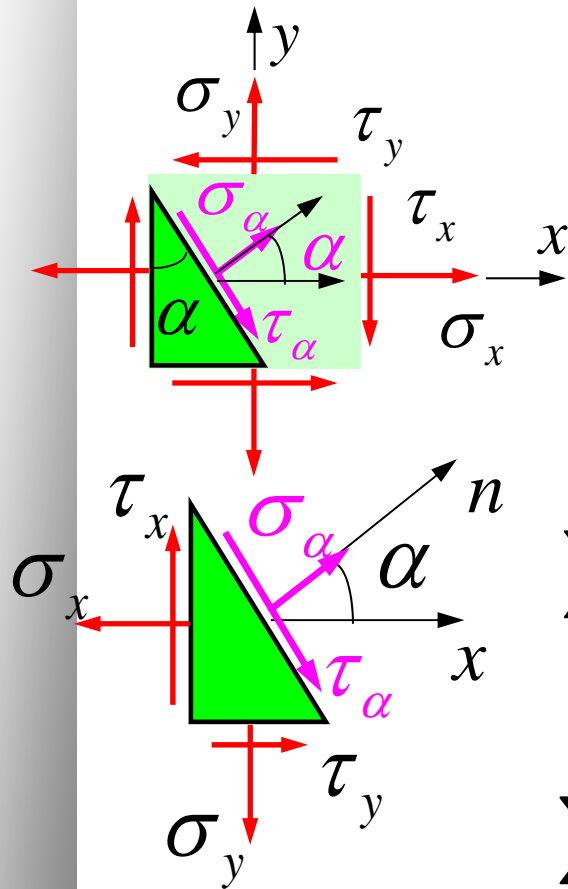
单向应力状态：某两对面上的应力为零

平面应力状态：某一对面上的应力为零

三向应力状态：各对面上的应力均不为零



7-2 二向应力状态分析—公式解析法



已知: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x = -\tau_y$,

求: 任意斜截面上应力

α : 截面外法线 n 与 x 轴之间的夹角,
 x 到 n 逆时针转动为正。

$$A_x = A_\alpha \cos \alpha, \quad A_y = A_\alpha \sin \alpha$$

$$\sum F_n = 0 \quad \sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_x A_x \cos \alpha - \sigma_y A_y \sin \alpha + \\ + \tau_x A_x \sin \alpha + \tau_y A_y \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_\tau = 0 \quad \tau_\alpha A_\alpha - \sigma_x A_x \sin \alpha + \sigma_y A_y \cos \alpha + \\ - \tau_x A_x \cos \alpha + \tau_y A_y \sin \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

7-2 二向应力状态分析—公式解析法

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

- 最大和最小正应力

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \text{时:}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\text{此时: } \tau_{\alpha_0} = 0$$

- 最大和最小切应力

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x} \text{时:}$$

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$
$$\tau_{\min} = \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

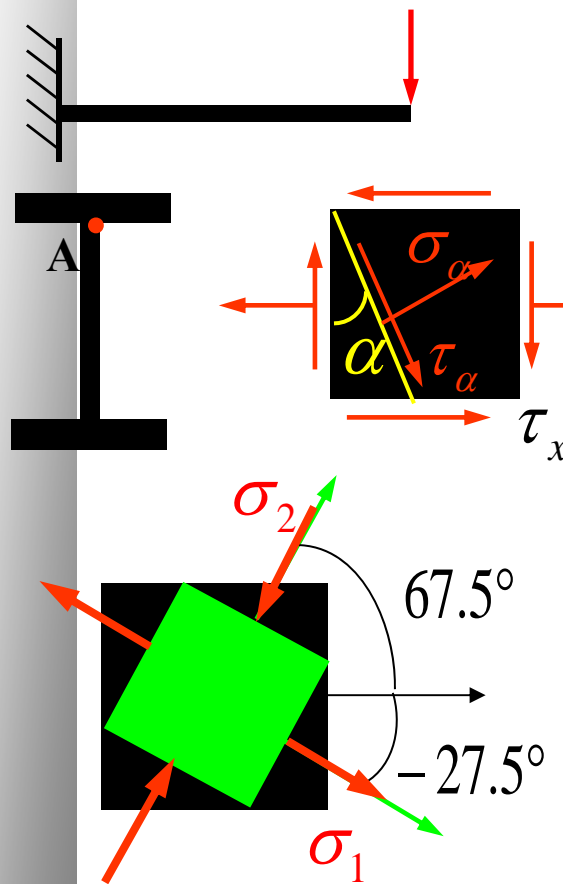
- 极值切应力平面与主平面的夹角为 45° : $\alpha_1 = \alpha_0 \pm 45^\circ$

- $\sigma_{\alpha+90^\circ} + \sigma_{\alpha} = \sigma_x + \sigma_y$ $\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_{\alpha}$

切应力为零的面为**主平面 (Principal Planes)** ;
主平面上的正应力为**主应力 (Principal Stress)** ;
全部由主平面构成的单元体为**主单元体**。

7-2 二向应力状态分析—公式解析法

例 从工字钢悬臂梁的固定端 A 点取出单元体如图所示。



已知: $\sigma_x = 70\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_x = 50\text{MPa}$
 求: $\alpha = 30^\circ$ 截面的正应力和切应力, 主应力的大小和主平面方位及最大切应力

解: 根据公式, 得

$$\sigma_\alpha = \frac{70}{2} + \frac{70}{2} \cos 60^\circ - 50 \sin 60^\circ = 9.2\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha = \frac{70}{2} \sin 60^\circ + 50 \cos 60^\circ = 55.3\text{MPa}$$

主平面

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \times 50}{-70} \quad \alpha_0 = -27.5^\circ$$

$$\alpha_0' = 67.5^\circ$$

最大切应力

$$\tau_{\max} = \sqrt{(35)^2 + 50^2} = 61\text{MPa}$$

主应力

$$\sigma_1 = \sigma_{-27.5^\circ} = 96\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{67.5^\circ} = -26\text{MPa}$$

7-3 二向应力状态分析—图解解析法

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

消去参数 α ，得

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2 = R^2$$

圆心: $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

半径:

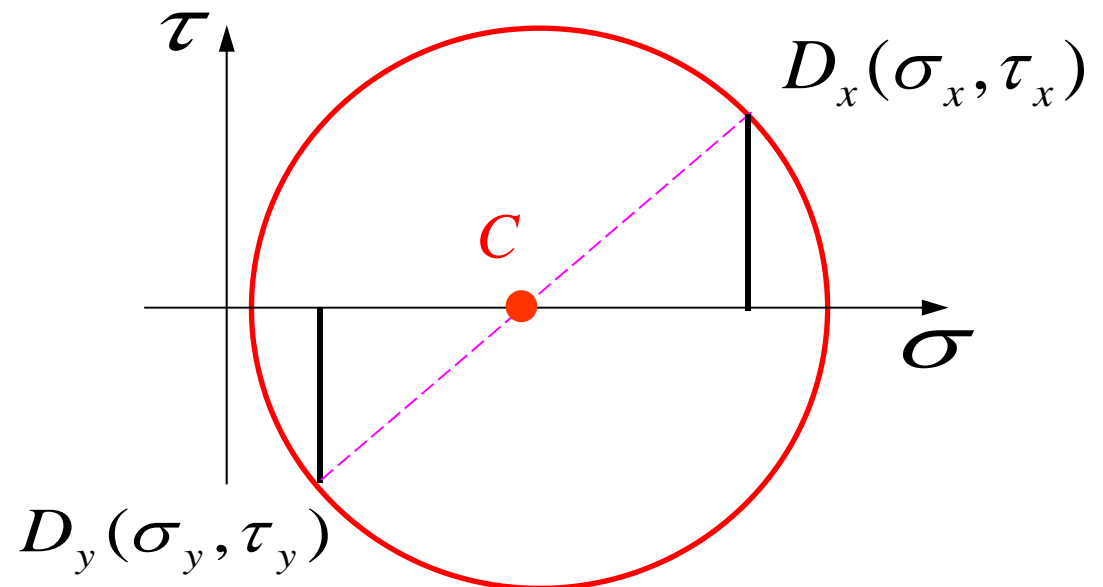
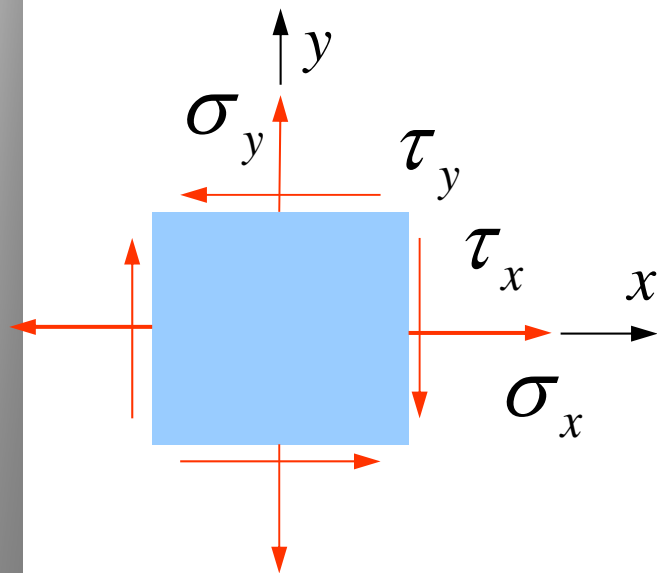
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

应力圆（莫尔圆），是德国科学家**Mohr**在**1882**年最先提出的。

7-3 二向应力状态分析—图解解析法

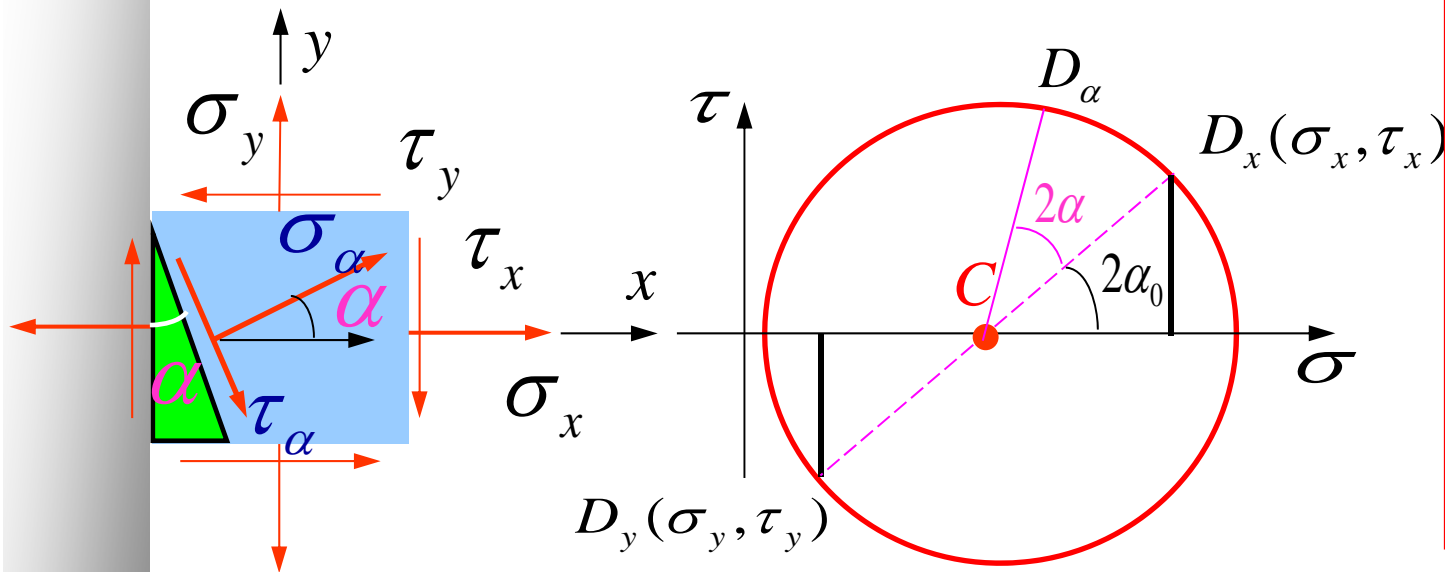
一、画应力圆的一般步骤：

- 1、根据三个已知应力的大小，建立 $\sigma\sim\tau$ 直角坐标系；
- 2、在 $\sigma\sim\tau$ 坐标系中，确定 x 、 y 面所对应的两点 D_x 、 D_y ；
- 3、连接两点 D_x 、 D_y ，交横轴得圆心 C 点；
- 4、以 C 点为圆心，以 CD_x 为半径画圆，即为应力圆；
- 5、证明：圆心 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ 半径 $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2}$



7-3 二向应力状态分析—图解解析法

二、 α 截面上的应力如何在应力圆上得到？



从 D_x 点出发，根据单元体 α 角的转向，沿圆周转动 2α 圆心角，得到 D_α 点，该点的坐标即为 α 截面上的应力。

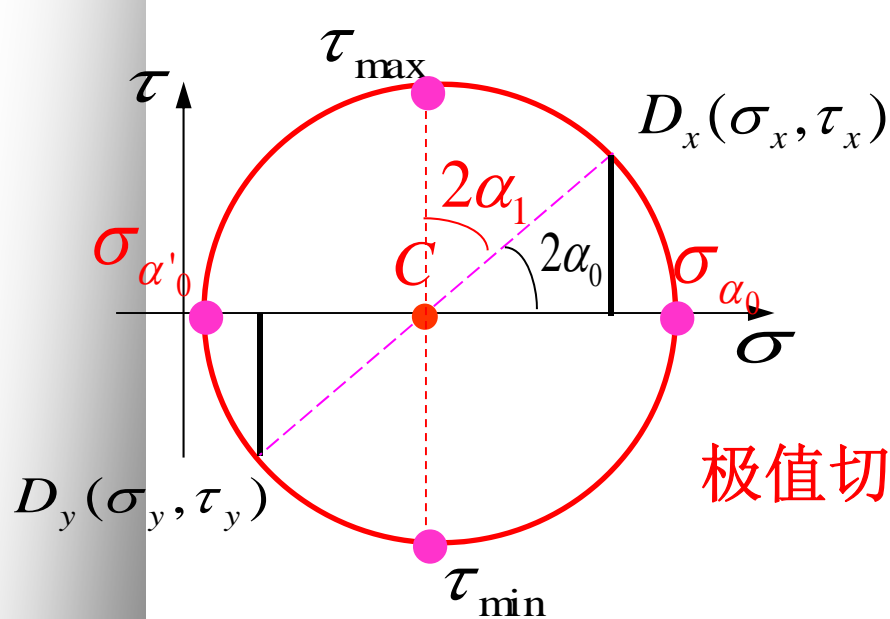
$$\begin{aligned}
 D_{\alpha x} &= C_x + R \cos(2\alpha + 2\alpha_0) \\
 &= C_x + R \cos 2\alpha \cos 2\alpha_0 - R \sin 2\alpha \sin 2\alpha_0 \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\
 &= \sigma_\alpha
 \end{aligned}$$

$$D_{\alpha y} = \tau_\alpha \quad (\text{同理})$$

点对应，
转向一致，
转角加倍

7-3 二向应力状态分析—图解解析法

三、应力圆上的主平面、主应力和极值切应力



主平面 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$

主应力

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\sigma_{\alpha'_0}$$

极值切应力

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\tau_{\min}$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}$$

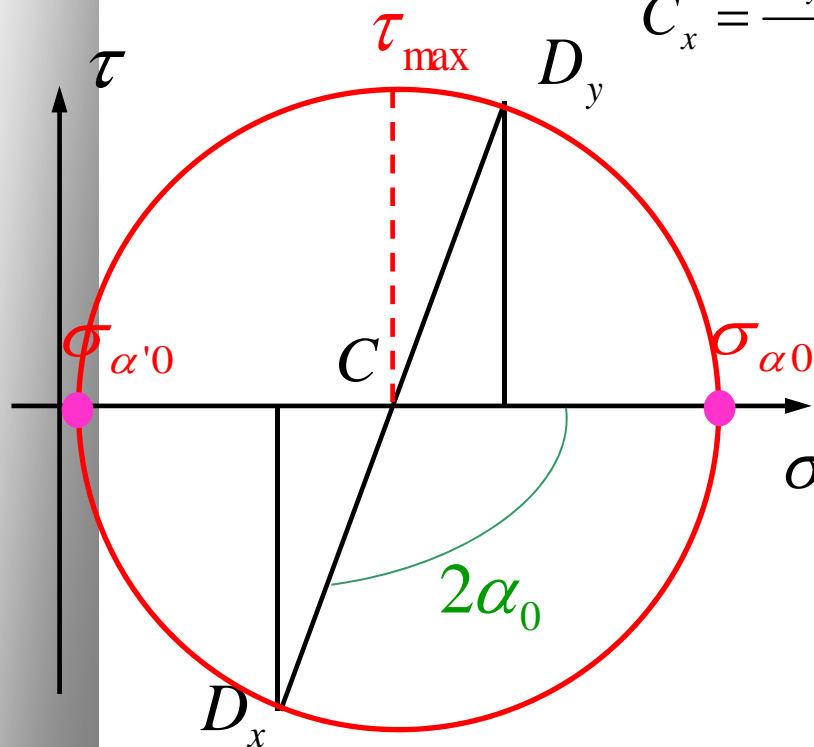
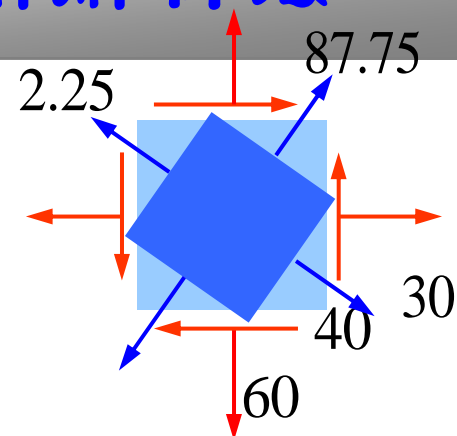
此外，从应力圆上还可以得到：

- 极值切应力的作用面与主平面间的夹角是45度；
- 互相垂直的截面上，切应力等值反向，正应力之和为常数；
- 切应力最大与最小的截面上，正应力不为零，且两正应力大小相等，符号一致。

7-3 二向应力状态分析—图解解析法

例 已经某单元体，试用图解解析法求解主应力、极值切应力的*大小及方位*。

解： $\sigma_x = 30, \sigma_y = 60, \tau_x = -\tau_y = -40$ 画应力圆



$$C_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 45 \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 42.75$$

主应力 $\sigma_{\alpha_0} = 87.75 \quad \sigma_{\alpha'_0} = 2.25$

主平面 $\alpha_0 = \frac{1}{2} (180^\circ - \arctan \frac{-2\tau_x}{\sigma_y - \sigma_x}) = 55^\circ$

极值切应力 $\tau_{\max} = R = 42.75$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 45^\circ = 100^\circ$$

讨论： 如何求解斜截面上的应力？

7-4 典型三向应力状态

- 应力状态的分类：（不严格定义）

单向应力状态：某两对面上的应力为零

平面应力状态：某一对面上的应力为零

三向应力状态：各对面上的应力均不为零

- 应力状态的分类：（严格定义）

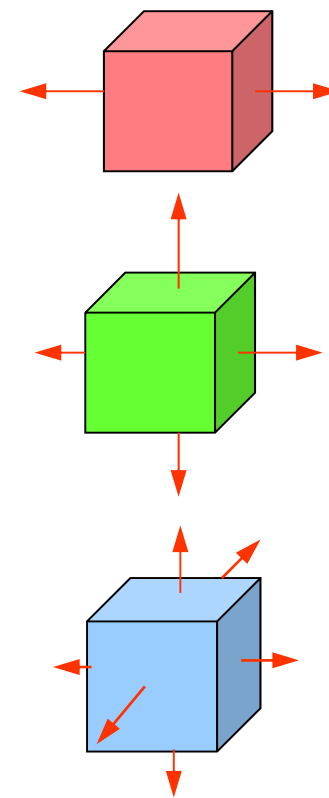
单向应力状态：非零主应力的个数为1

二向应力状态：非零主应力的个数为2

三向应力状态：非零主应力的个数为3

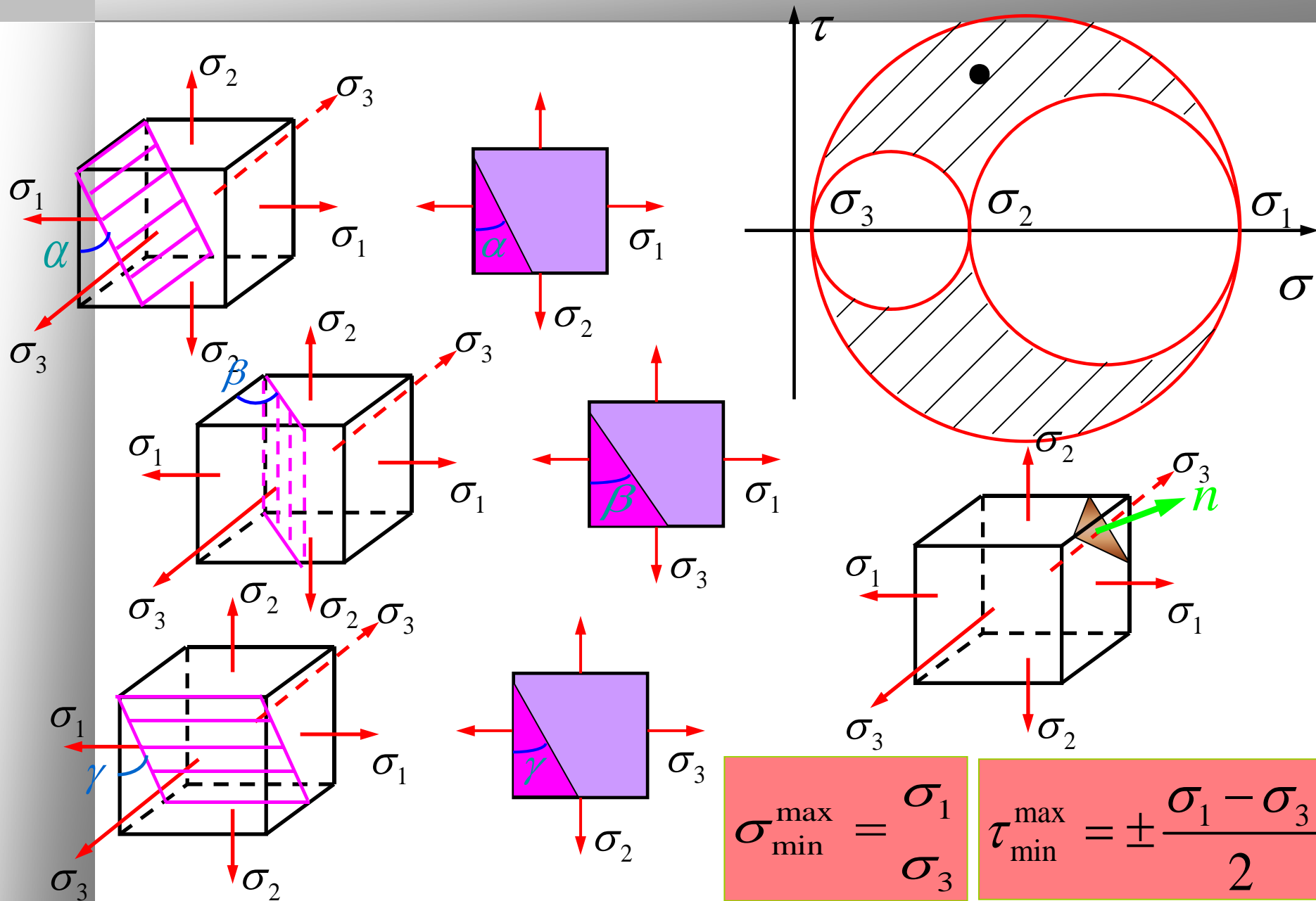
- 按代数数值排列三个主应力

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



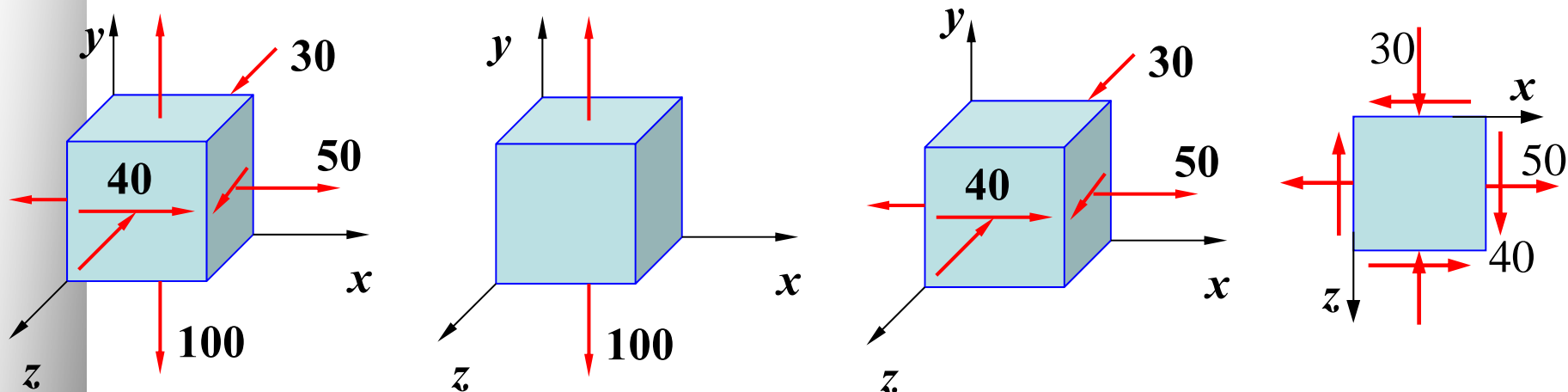
主单元体

7-4 典型三向应力状态

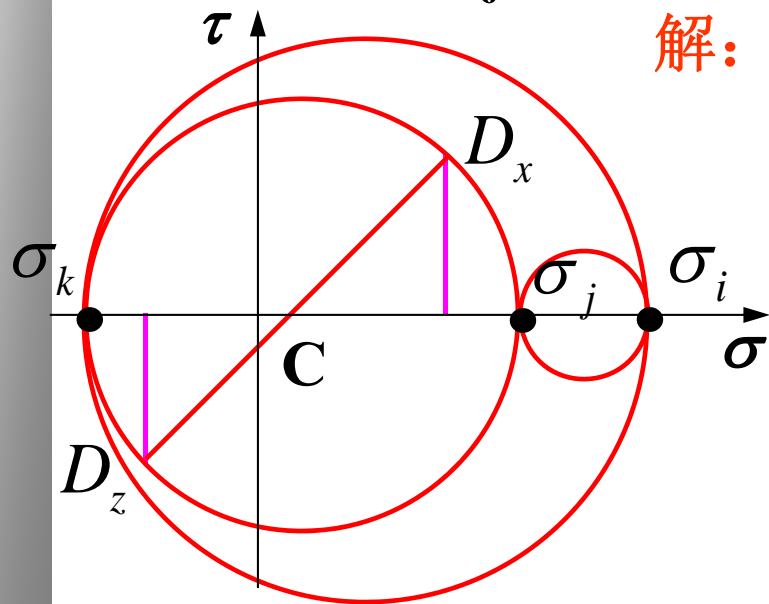


7-4 典型三向应力状态

例 求下面三向应力状态的应力圆、主应力和最大切应力。



解：将三向应力状态的单元分解 $\sigma_i = 100$
作 xz 平面应力圆



$$C(10, 0) \quad R = 40\sqrt{2} = 56$$

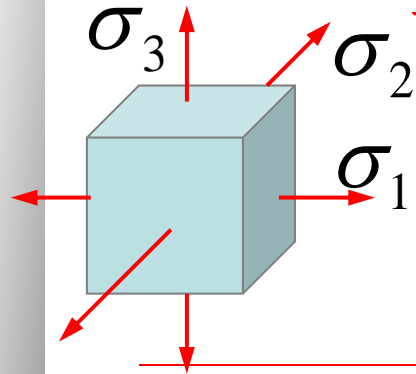
$$\sigma_j = 66 \quad \sigma_k = -46$$

$$\sigma_1 = 100, \sigma_2 = 66, \sigma_3 = -46$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 73$$

7-5 广义胡克定律

主应变(Principal Strain)：主应力方向上的应变



$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \rightarrow \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

σ_1 单独作用 σ_2 单独作用 σ_3 单独作用

ε_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$
ε_2	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$
ε_3	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

同时作用

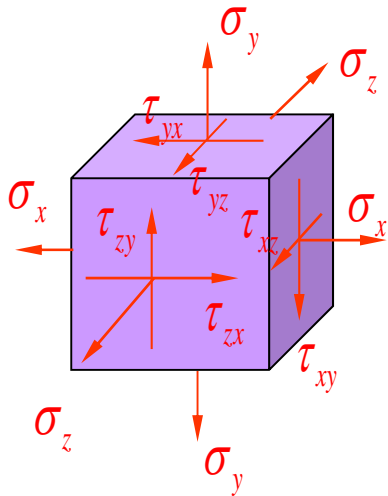
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \left(-\mu \frac{\sigma_2}{E}\right) + \left(-\mu \frac{\sigma_3}{E}\right)$$

7-5 广义胡克定律

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}$$

广义胡克定律
Generalized Hooke's Law

对于非主单元体情况，在小变形的前提下，切应力不影响单元体棱边的长度变化，所以广义胡克定律为：



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

7-5 广义胡克定律

$$V_0 = dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} V_1 &= (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz \\ &= (1 + \varepsilon_x) (1 + \varepsilon_y) (1 + \varepsilon_z) V_0 \\ &= (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) V_0 \end{aligned}$$

体积应变

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$= \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \sigma_m$$

$$= \frac{\sigma_m}{K}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

体积弹性模量

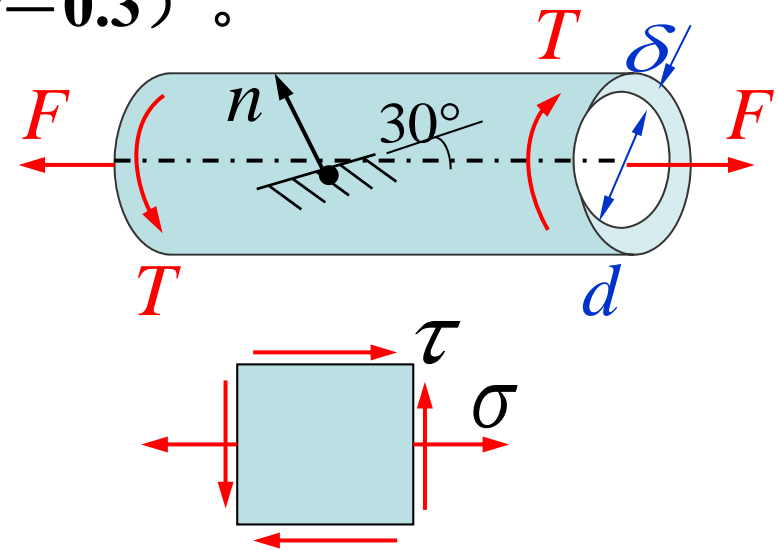
7-5 广义胡克定律

例 薄壁圆筒作拉伸—扭转组合变形实验时受力如图， $F=20\text{kN}$ ， $T=600\text{Nm}$ ， $d=50\text{mm}$ ， $\delta=2\text{mm}$ ，分析指定截面上的应力和该方向应变（ $E=200\text{GPa}$ ， $\mu=0.3$ ）。

解： 横截面应力： $D = 54\text{mm}$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} = 61.2\text{MPa}$$

$$\tau = \frac{16T}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} = -73.2\text{MPa}$$

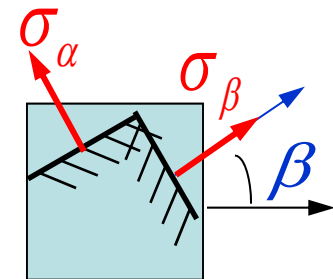


斜截面应力($\alpha=120^\circ$): $\sigma_\alpha = -48.1\text{MPa}$ $\tau_\alpha = -10.1\text{MPa}$

斜截面应变:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x - \sigma_\alpha = 109.3\text{MPa}$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_\beta}{E} - \mu \frac{\sigma_\alpha}{E} = 618.6 \times 10^{-6}$$


7-6* 平面应力状态下的应变分析

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{E} [\sigma_{\alpha} - \mu \sigma_{\alpha \pm 90^{\circ}}]$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha-90^{\circ}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\tau_x = G\gamma$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha$$

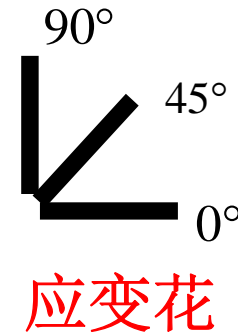
进行平面问题的应变分析时，需要确定三个应变分量 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma)$ ，但是切应变难以直接测量，所以一般选用三个特殊角度测量线应变 $\varepsilon_{\alpha 1}, \varepsilon_{\alpha 2}, \varepsilon_{\alpha 3}$ ，然后联立求解方程组，即可求出应力分量，进而得到主应力和最大切应力。

7-6* 平面应力状态下的应变分析

$$\varepsilon_{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_1 - \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha_1$$

$$\varepsilon_{\alpha_2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_2 - \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha_2$$

$$\varepsilon_{\alpha_3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_3 - \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha_3$$



$$\alpha_1 = 0^\circ$$

$$\alpha_2 = 45^\circ$$

$$\alpha_3 = 90^\circ$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90}$$

$$\gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon_{90} - 2\varepsilon_{45}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\tau = G\gamma = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma$$

第七章的基本要求

1. 明确一点应力状态、主应力和主平面、单元体等基本概念；
2. 对于平面应力状态，熟练掌握用公式解析法和图解法解析计算任意斜截面应力、主应力和主平面方位；
3. 了解三向应力状态的应力圆的画法，掌握主应力和最大切应力的计算方法；
4. 掌握广义虎克定律及其应用。

第八章 强度理论

- ◆ 强度理论的概念
- ◆ 常用强度理论
- ◆ 其他强度理论简介
- ◆ 强度理论的应用



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

8-1 强度理论的概念

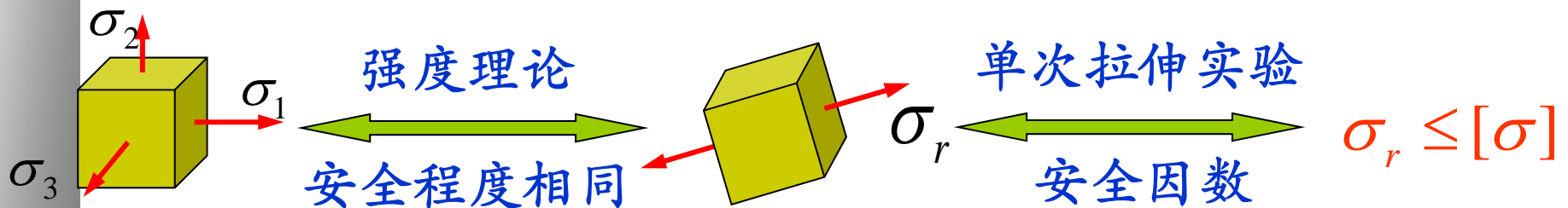
分清破坏形式
分析破坏原因
分离破坏因素

总结
破坏
规律

提出破坏假设
通过实验验证

强度理论

强度理论 (Strength Theory):
关于材料破坏原因的一种假说

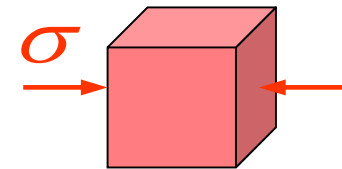


8-2 常用强度理论

(一) 第一强度理论 (最大拉应力理论)

- 材料发生脆性断裂的主要原因是**最大拉应力**;
- 在复杂应力状态下, 只要最大拉应力 σ_1 达到了简单拉伸试验所确定的极限应力 σ_b 时, 材料就会发生脆性断裂。

- 断裂判据: $\sigma_1 = \sigma_b$
- 强度条件: $\sigma_1 \leq \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\sigma$$

- 第一强度理论由伽利略在十七世纪提出, 可以很好地解释脆性材料拉断的现象, 但无法应用于只有压应力的情况。

8-2 常用强度理论

(二) 第二强度理论 (最大拉应变理论)

- 材料发生脆性断裂的主要原因是**最大拉应变**；
- 在复杂应力状态下，只要最大拉应变 ε_1 达到了简单拉伸试验所确定的极限应变 ε_b 时，材料就会发生脆性断裂。
- 断裂判据：
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_b \longrightarrow \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$
$$\because \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E}$$
- 强度条件：
$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$$
- 第二强度理论由马略特在十七世纪后期提出，可以很好地解释脆性材料受压时沿纵向截面开裂的现象。

8-2 常用强度理论

(三) 第三强度理论 (最大切应力理论)

- 材料发生塑性屈服的主要原因是**最大切应力**;
- 在复杂应力状态下, 只要最大切应力 τ_{\max} 达到了简单拉伸试验所确定的极限切应力 τ_s 时, 材料就会发生塑性屈服。
- 屈服判据: $\tau_{\max} = \tau_s \longrightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$
 $\because \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$
- 强度条件: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma]$
- 第三强度理论最早由库伦提出, 后经屈雷斯加完善, 可以用于绝大多数塑性材料, 其较实验结果偏安全。

8-2 常用强度理论

$$\tau^* = \sqrt{\frac{1}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}$$

(四) 第四强度理论 (均方根切应力理论)

- 材料发生屈服的主要原因是均方根切应力；
- 在复杂应力状态下，只要均方根切应力 τ^* 达到了简单拉伸试验所确定的极限均方根切应力 τ^{*0} 时，材料就会发生塑性屈服。
- 屈服判据： $\tau^* = \tau^{*0}$
 $\therefore \tau^* = \frac{1}{6} \sqrt{3[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}, \quad \tau^{*0} = \frac{\sqrt{6}\sigma_s}{6}$
 $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \sigma_s$
- 强度条件： $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma]$
- 第四强度理论由胡贝尔和米塞斯提出，可以用于绝大多数塑性材料，其较第三强度理论更接近实验结果，更节约材料。

8-3 其他强度理论简介

双剪强度理论

- ◆ 三个主应力都对塑性材料屈服有影响（第三强度理论有缺陷）。
- ◆ 三个极值切应力只用两个是独立的（第四强度理论有缺陷）。
- ◆ 塑性材料屈服的主要因素是**两个较大的极值切应力之和**。

$$\tau_{yu} = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) & (\tau_{12} \geq \tau_{23}) \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 & (\tau_{23} \geq \tau_{12}) \end{cases}$$

$$\sigma_r = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma] & (\tau_{12} \geq \tau_{23}) \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma] & (\tau_{23} \geq \tau_{12}) \end{cases}$$

- ◆ 能够更充分地发挥材料的承载能力（节约材料）；更好地符合很多材料的实验结果。
- ◆ 双剪强度理论由西安交通大学俞茂鋈教授于1961年提出。

8-4 强度理论的应用

(一) 相当应力

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

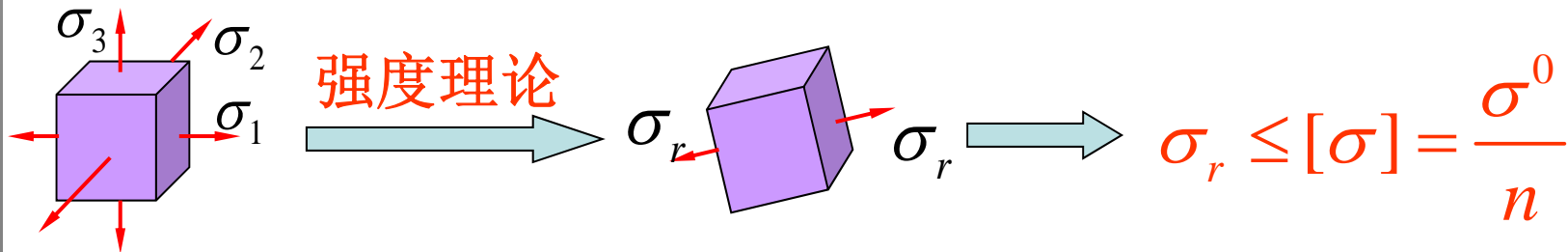
$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

统一写成

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$



8-4 强度理论的应用

(二) 强度理论的选用

(1) 材料性质的影响

脆性材料 第一、第二强度理论

塑性材料 第三、第四强度理论

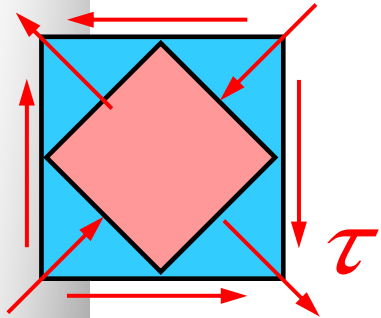
(2) 应力状态、温度，加载速率的影响

塑性材料 三向等拉状态 脆性断裂

脆性材料 三向等压状态 塑性屈服

在实际应用中，应根据材料可能发生的破坏形式，或者结合断口分析，选择适合的强度理论进行计算。

8-4 强度理论的应用



例 已知纯剪切应力状态，
求各相当应力。

解：求主应力 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$

第一强度理论： $\sigma_{r1} = \sigma_1 = \tau$

第二强度理论： $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \mu)\tau$

第三强度理论： $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau$

第四强度理论： $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}(\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2)} = \sqrt{3}\tau$

讨论：许用切应力与许用拉应力之间的关系 $\sigma_r \leq [\sigma], \tau \leq [\tau]$

脆性材料 $\mu = 0.2 \sim 0.25$

塑性材料

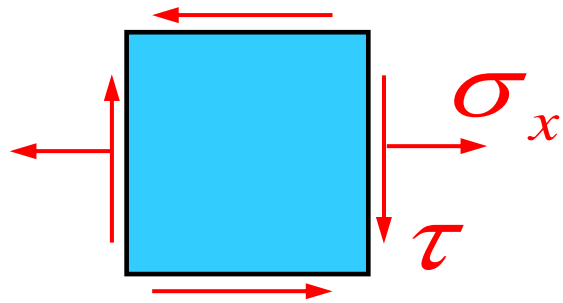
通常取 $[\tau] = (0.8 \sim 1)[\sigma]$

通常取 $[\tau] = (0.5 - 0.6)[\sigma]$

8-4 强度理论的应用

例 已知拉剪应力状态如图，求
 σ_{ri} ， $i = 3, 4$

解：求主应力



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$$

第四强度理论

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2}$$

(可以当公式使用)

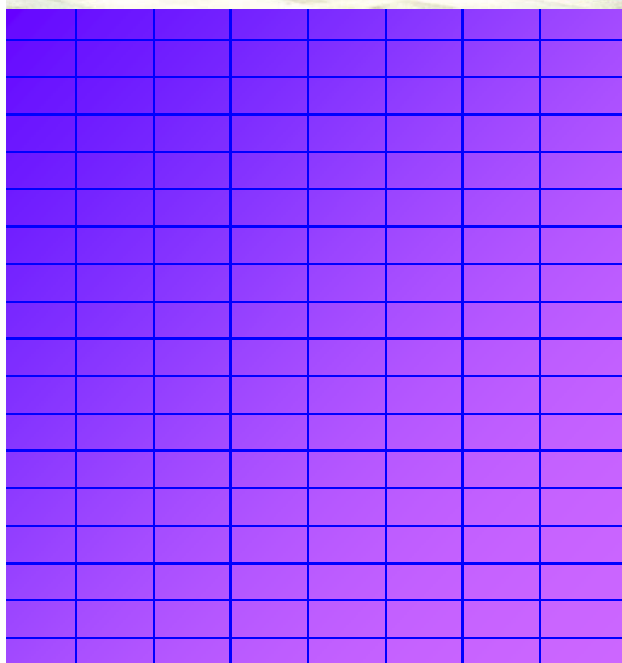
第八章的基本要求

1. 理解强度理论的概念；

2. 熟练掌握四个经典强度理论的概念和相当应力的计算。

第九章 组合变形

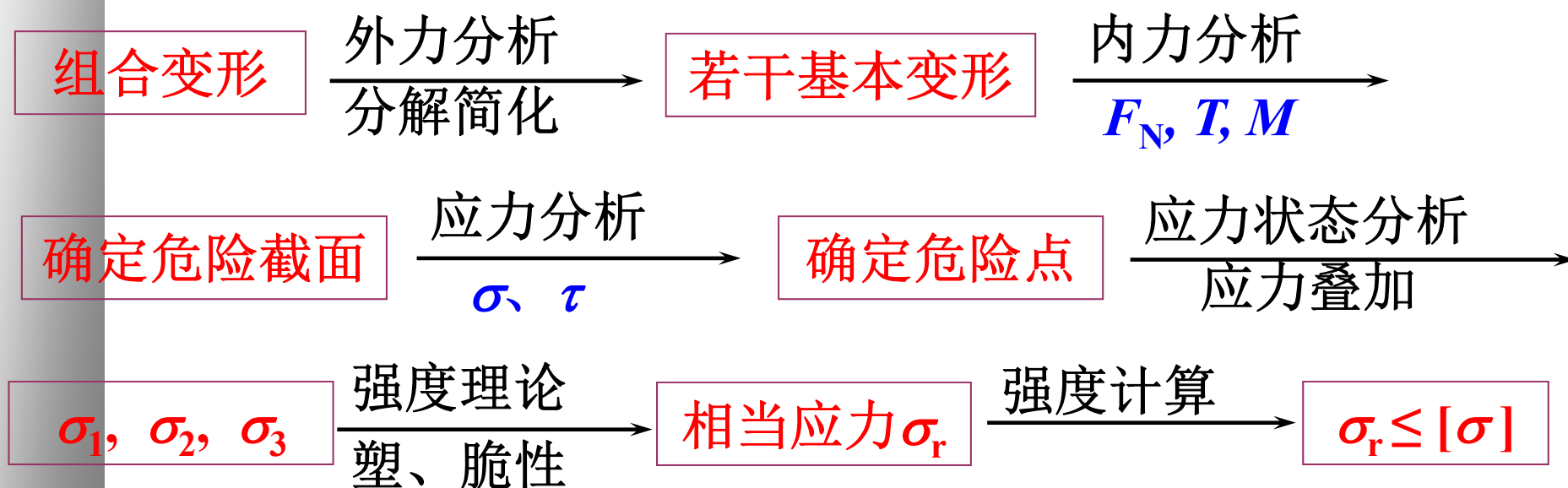
- ◆ 概述
- ◆ 斜弯曲
- ◆ 拉压与弯曲
- ◆ 弯曲与扭转
- ◆ 其它组合变形



航天航空学院—力学中心

9-1 概述

- **组合变形**：杆件中同时有两种以上的基本变形
- **求解方法**：**叠加法**（根据各个内力分量，分别计算每种基本变形下的应力，再把计算结果叠加，得到杆件在原载荷作用下的应力）
- **求解思路**：

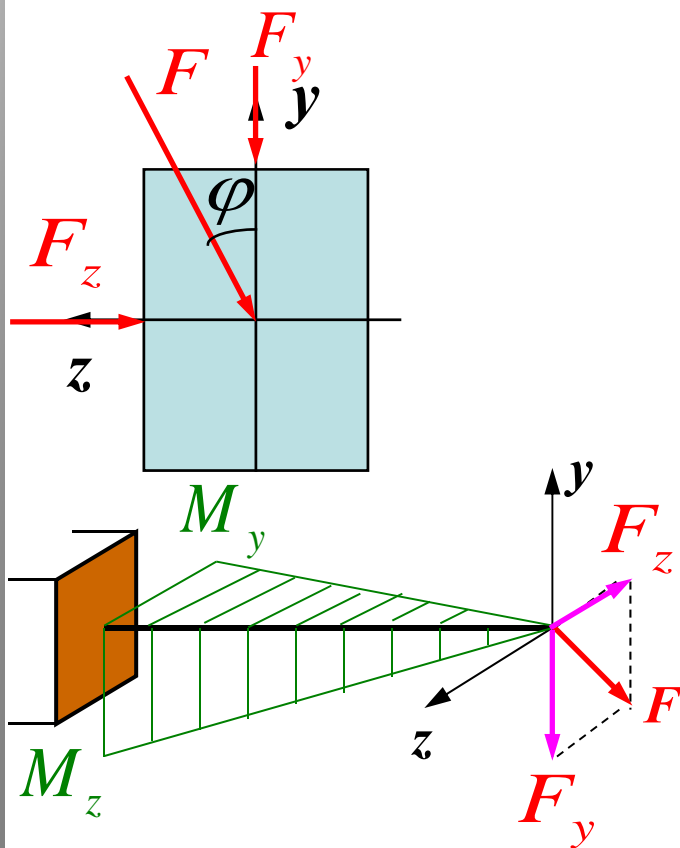
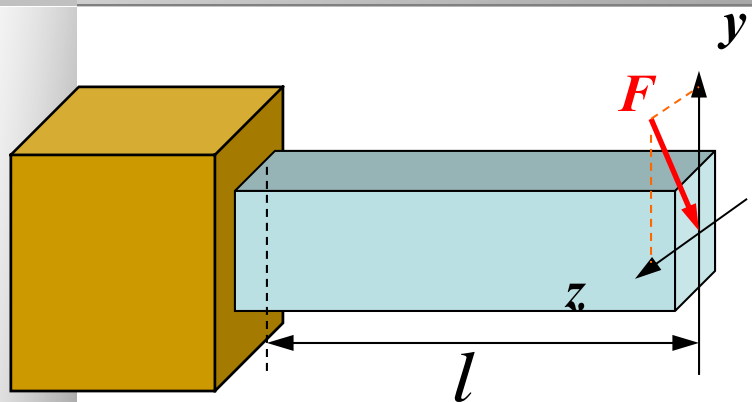


9-1 概述

常见的组合变形类型：

- ★● 斜弯曲：两个相互垂直平面内的弯曲组合；
- ★● 拉伸或压缩与弯曲的组合；
 - 拉伸或压缩与扭转的组合；
- ★● 弯曲与扭转的组合；
 - 两个相互垂直平面内的弯曲与扭转的组合。

9-2 斜弯曲



1、外力分析:

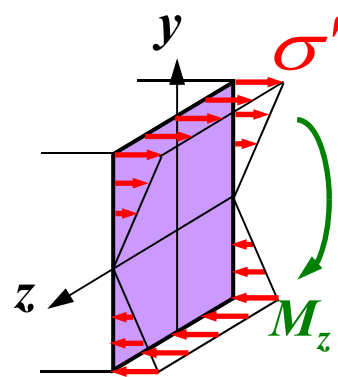
$$F_y = F \cos \varphi \quad F_z = F \sin \varphi$$

2、内力分析:

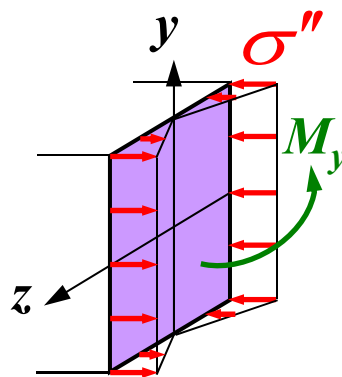
$$M_z = F_y l \quad M_y = F_z l$$

危险截面在固定端

3、应力分析:

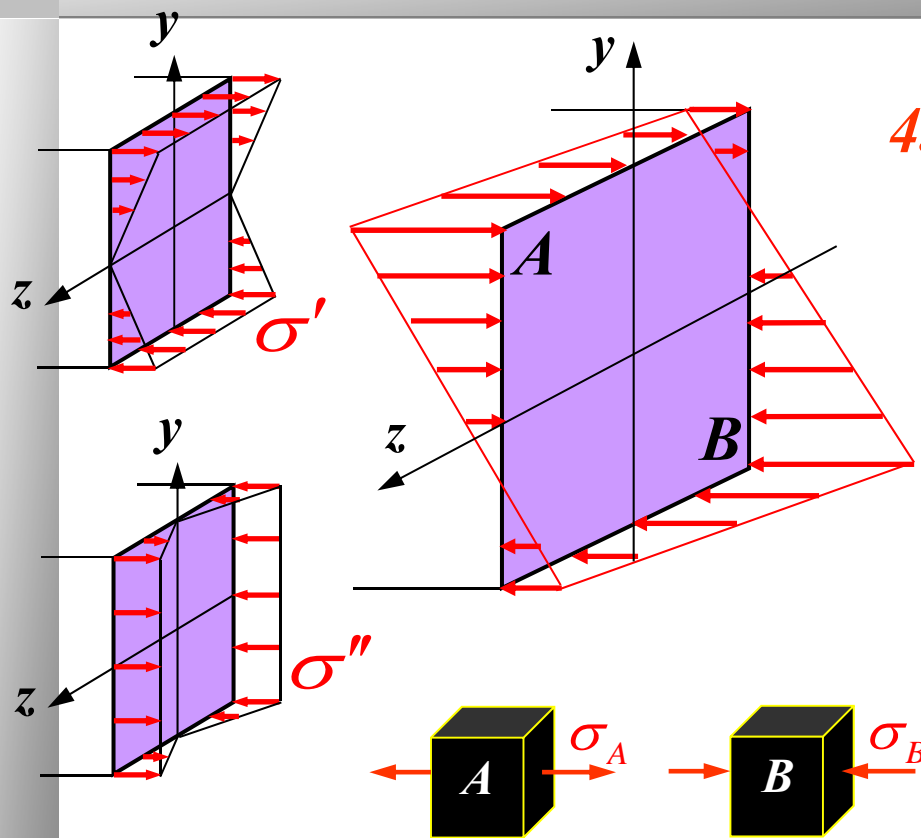


$$\sigma' = \frac{M_z}{I_z} y$$



$$\sigma'' = \frac{M_y}{I_y} z$$

9-2 斜弯曲



注意：危险点的应力状态是单向应力状态！

4. 应力叠加

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

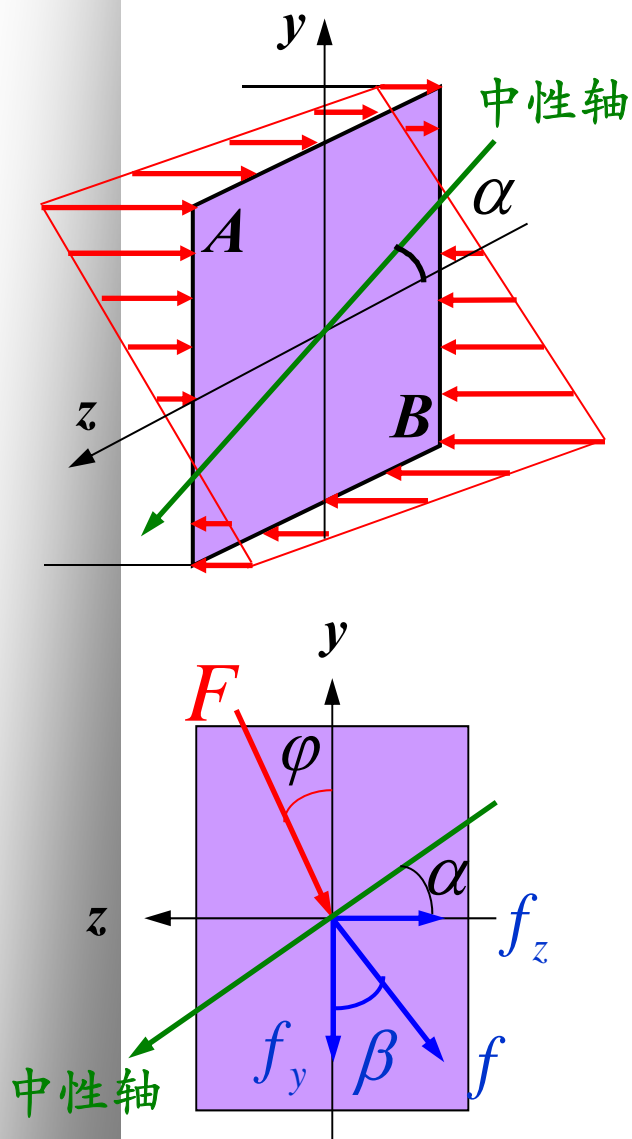
A, B 是危险点

$$\begin{aligned} \sigma_A = \sigma_{\max}^+ &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \\ &= Fl \left(\frac{\cos \varphi}{W_z} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \\ \sigma_B = \sigma_{\max}^- &= -Fl \left(\frac{\cos \varphi}{W_z} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \end{aligned}$$

5. 强度条件

$$\left| \sigma_{\max}^+ \right| \leq [\sigma^+] \quad \left| \sigma_{\max}^- \right| \leq [\sigma^-]$$

9-2 斜弯曲



6. 中性轴的位置

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \quad \tan \alpha = -\frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi$$

中性轴与载荷作用平面不互相垂直，最大应力在距离中性轴最远的点。

7. 自由端的挠度

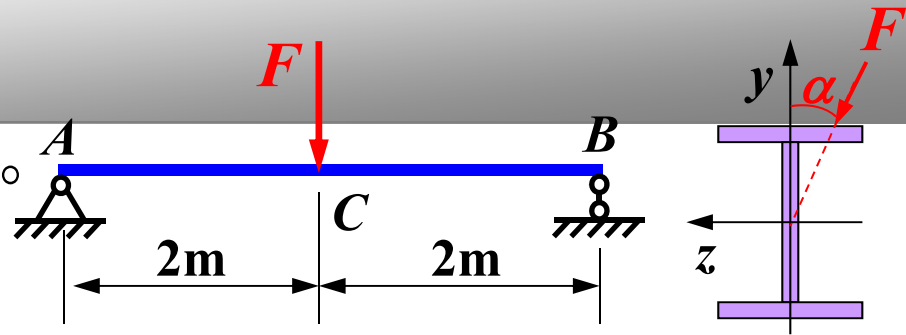
$$f_y = \frac{Fl^3}{3EI_z} \cos \varphi \quad f_z = \frac{Fl^3}{3EI_y} \sin \varphi$$

$$\tan \beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi \quad \alpha = \beta$$

挠曲线平面与中性轴仍然互相垂直。

9-2 斜弯曲

例 $F = 7\text{kN}$, $[\sigma] = 160\text{MPa}$, $\alpha = 20^\circ$
试选择截面工字钢型号。



解：1、外力分析

$$F_y = F \cos \alpha = 6.578\text{kN}$$

$$F_z = F \sin \alpha = 2.394\text{kN}$$

2、内力分析： C截面为危险截面

$$M_{z \max} = F_y l / 4 = 6.578\text{kNm}$$

$$M_{y \max} = F_z l / 4 = 2.394\text{kNm}$$

3、应力分析： 危险点在右上和左下两点

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} + \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

4、试算： $W_z / W_y = 6$

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{6.578}{W_z} + \frac{6 \times 2.394}{W_z} \right) \times 10^3 \leq 160$$

$$W_z \geq 130.9\text{cm}^3 \quad \text{选择16号工字钢}$$

$$W_z = 141\text{cm}^3 \quad W_y = 21.2\text{cm}^3$$

5、验算：

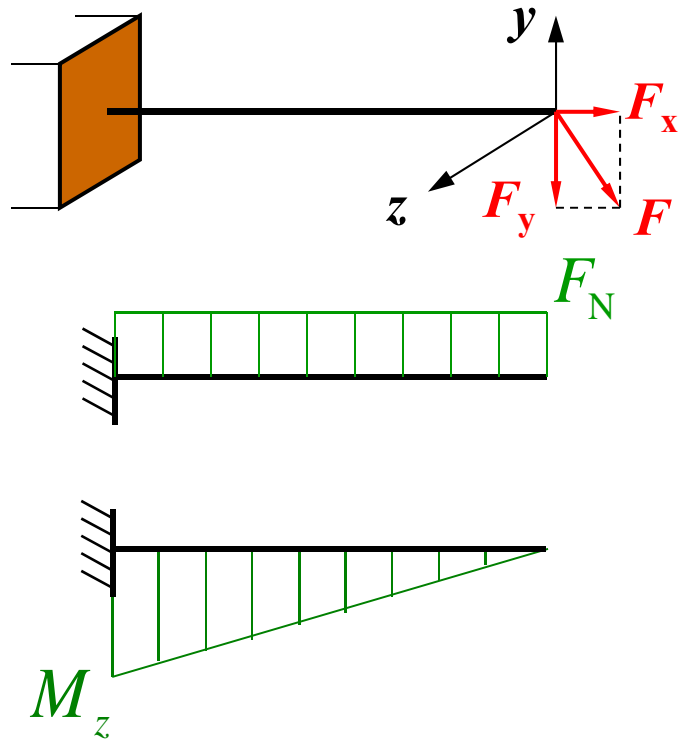
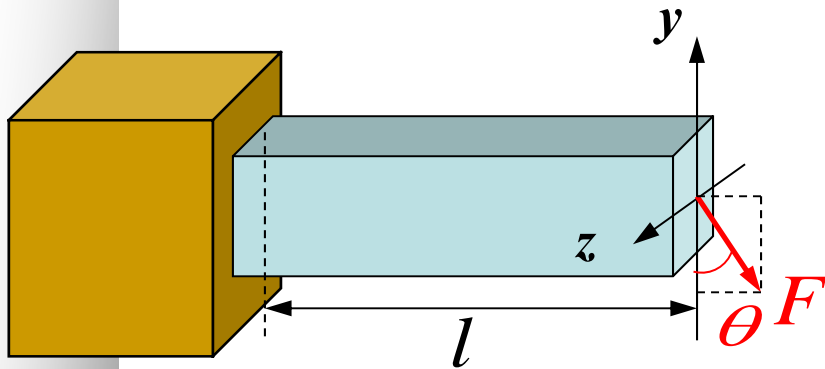
$$\sigma_{\max} = 148.5\text{MPa}$$

安全！

讨论： 如果 $\alpha = 0^\circ$?

$$\sigma_{\max} = 49.6\text{MPa}$$

9-3 拉压与弯曲



1、外力分析

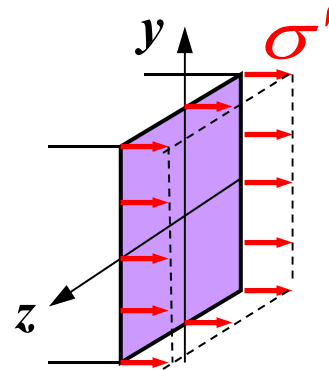
$$F_x = F \sin \theta, F_y = F \cos \theta$$

2、内力分析

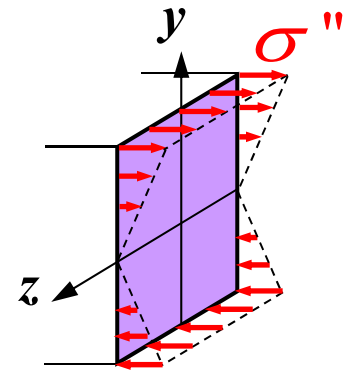
$$F_N = F_x, M_z = F_y l$$

固定端为危险截面

3、应力分析

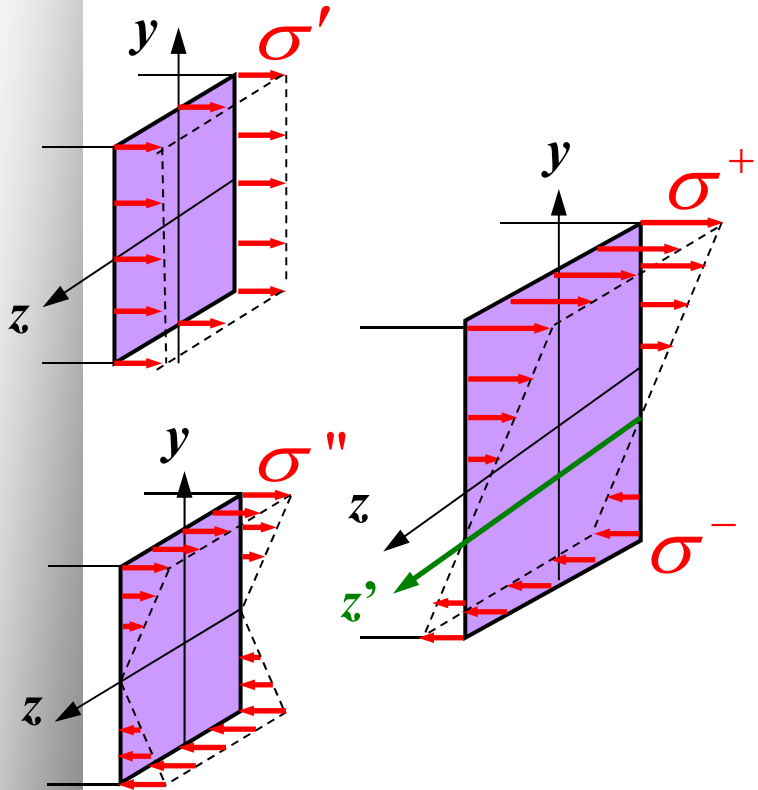


$$\sigma' = \frac{F_N}{A}$$



$$\sigma'' = \frac{M_z}{I_z} y$$

9-3 拉压与弯曲



4、应力叠加

上缘、下缘各点为危险点

$$\text{上缘 } \sigma_{\max}^+ = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$\text{下缘 } \sigma_{\max}^- = \frac{F_N}{A} - \frac{M_z}{W_z}$$

5、强度条件

$$|\sigma_{\max}^+| \leq [\sigma^+]$$

$$|\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma^-]$$

注意：危险点的应力状态是单向应力状态！

6、中性轴位置：向一侧平移！

9-3 拉压与弯曲

例 校核 AB 横梁的强度，已知其截面为两个No12.6的槽钢。

$$F = 8\text{kN}, [\sigma] = 120\text{MPa}.$$

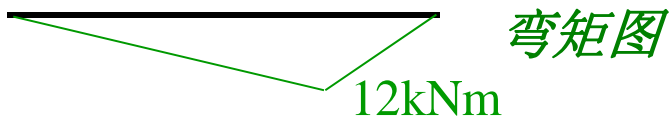
解: 1. 外力分析

$$F_{CD} = 25.6\text{kN}$$

$$F_{CD}^x = 22.2\text{kN} \quad F_{Ax} = 22.2\text{kN}$$

$$F_{CD}^y = 12.8\text{kN} \quad F_{Ay} = 4.8\text{kN}$$

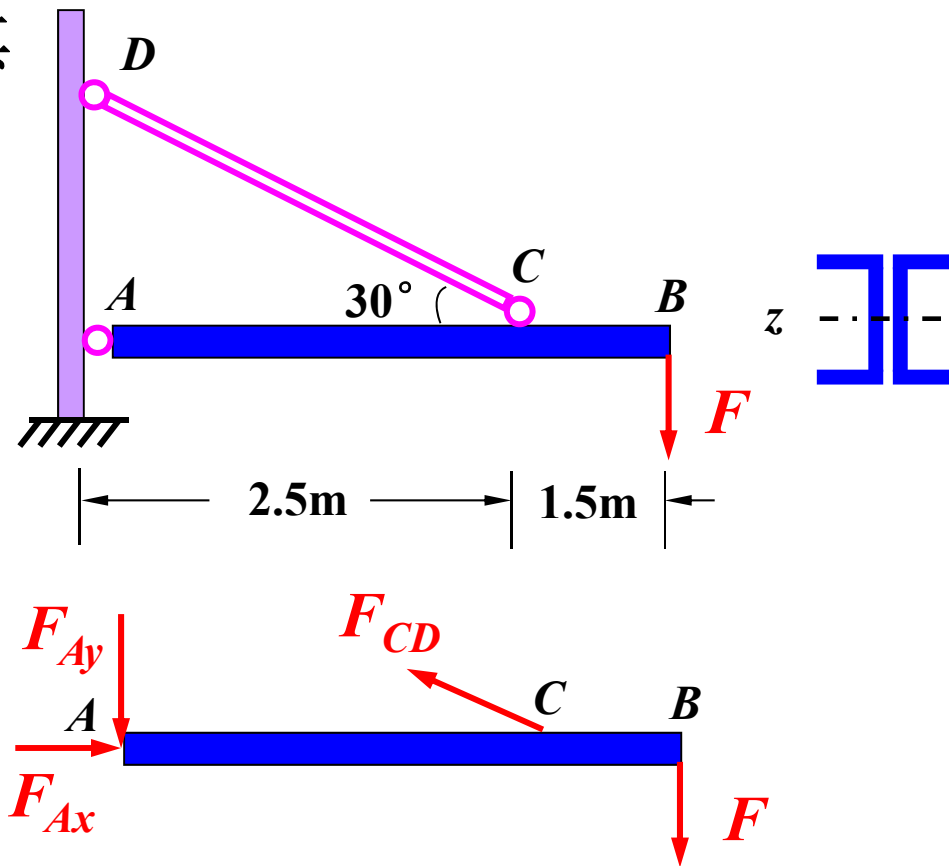
2. 内力分析



3. 应力分析

$$A = 15.69\text{cm}^2$$

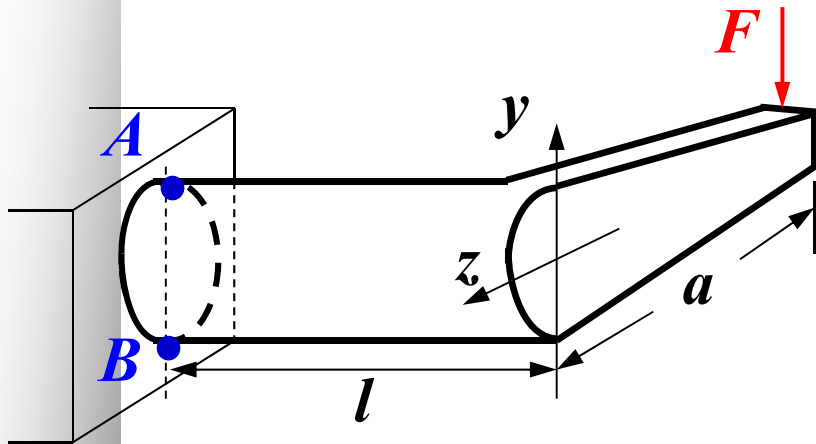
$$W_z = 62.137\text{cm}^3$$



$$\left| \sigma_{\max}^- \right| = \frac{F_N}{2A} + \frac{M_{\max}}{2W_z} = 104\text{MPa} < [\sigma]$$

强度足够!

9-4 弯曲与扭转

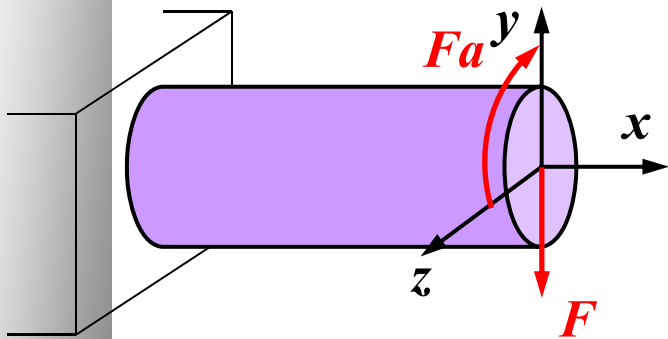


1、外力分析：弯扭组合变形

2、内力分析：固定端为危险截面

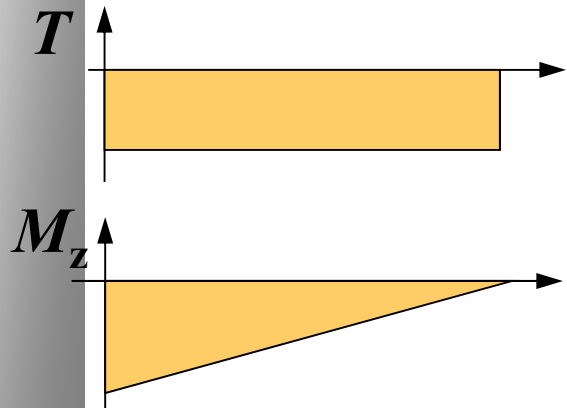
$$T = Fa \quad M_z = Fl$$

3、应力分析：危险点为A、B点

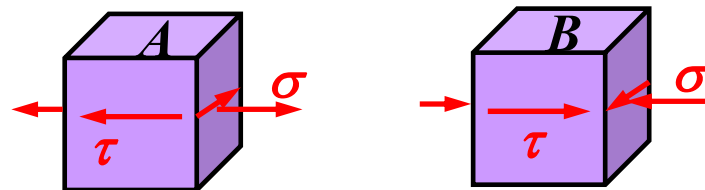


$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$



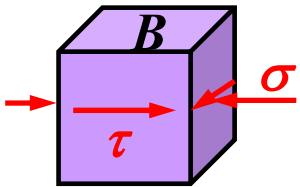
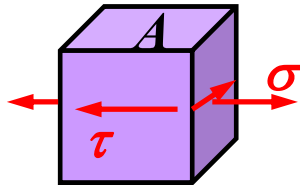
4、应力状态分析：



$$\tau = \frac{T}{W_p}$$

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}$$

9-4 弯曲与扭转



$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}, \tau = \frac{T}{W_p}$$

对于圆截面:

$$W_p = 2W_z$$

4、应力状态分析:

注意: 危险点的应力状态是拉剪应力状态!

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

5、第三、第四强度理论:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + T^2}}{W_z}$$

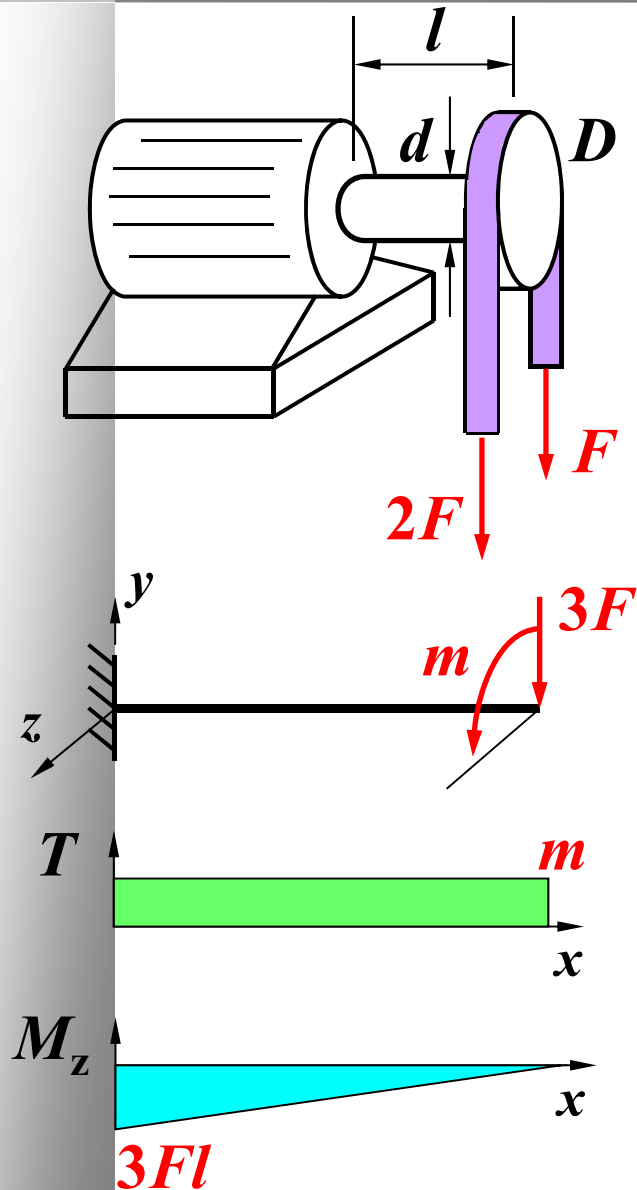
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0.75T^2}}{W_z}$$

(可以当公式使用)

6、强度条件

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

9-4 弯曲与扭转



例 按第三强度理论校核电动机传动轴的强度。 $N = 9\text{kW}$, $n = 715\text{rpm}$, $D = 250\text{mm}$, $d = 40\text{mm}$, $l = 120\text{mm}$, $[\sigma] = 60\text{MPa}$.

解: 1、外力分析:

$$m = 9549 \text{ N/n} = 120 \text{ Nm}$$

$$m = (2F - F)D/2 \quad F = 960 \text{ N}$$

2、内力分析: 危险截面在固定端

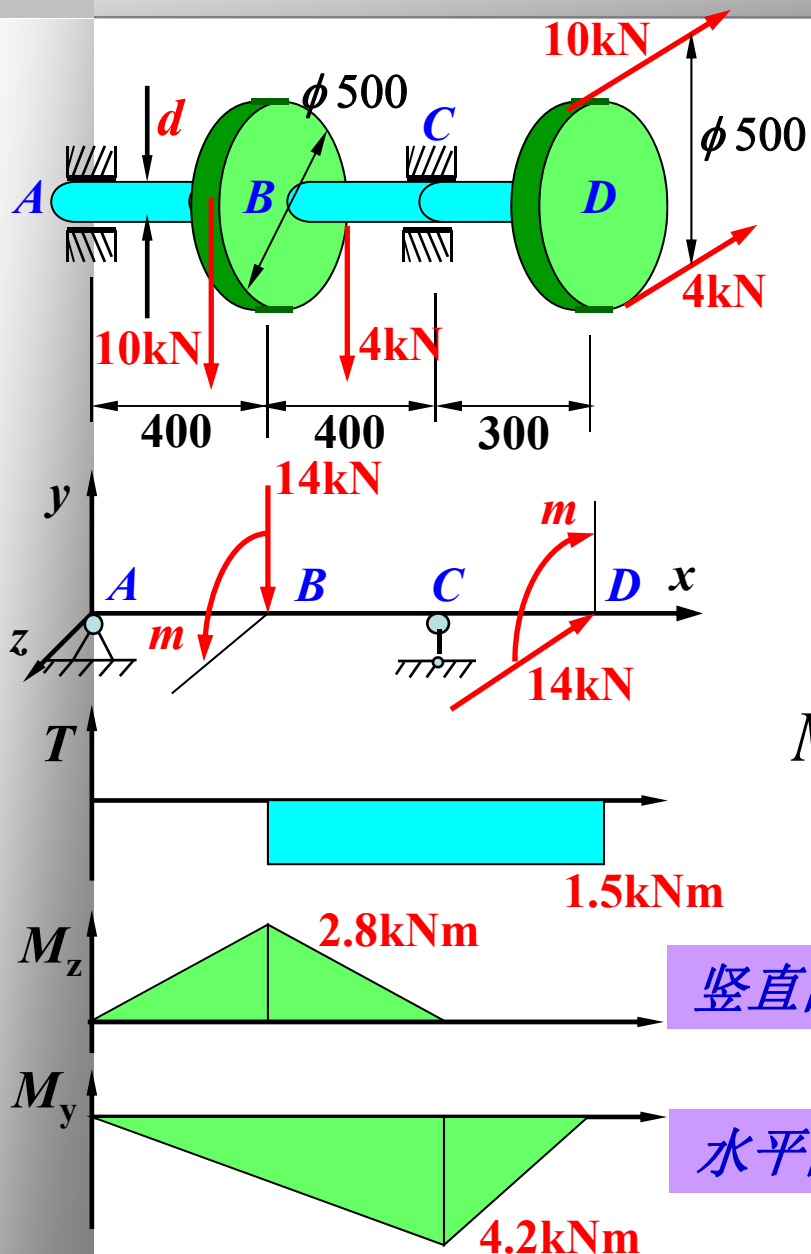
$$M_z = 3Fl = 345 \text{ Nm}, T = 120 \text{ Nm}$$

3、应力强度计算(弯曲+扭转):

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_z^2 + T^2}}{W_z} = 58.1 \text{ MPa}$$

强度足够!

9-4 弯曲与扭转



例 $[\sigma]=80\text{MPa}$, 按第四强度理论设计皮带轮传动轴的直径 d 。

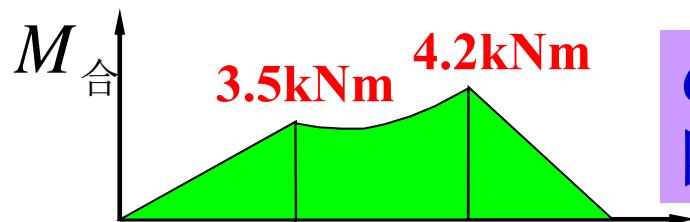
解: 1、外力分析

$$m = (10 - 4) \times \frac{0.5}{2} = 1.5\text{kNm}$$

2、内力分析

B 截面: $M_{B\text{合}} = \sqrt{2.8^2 + 2.1^2} = 3.5\text{kNm}$

C 截面: $M_{C\text{合}} = 4.2\text{kNm}$



C 截面为危险截面!

3、应力强度分析

$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M_{C\text{合}}^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$d = 82.4\text{mm}$$

9-5 其它组合变形问题

例 水轮机主轴输出功率 $N=37500\text{kW}$ ，转速 $n=150\text{rpm}$ ，主轴重 $G=120\text{kN}$ ，叶轮重 $W=180\text{kN}$ ，轴向推力 $F=5000\text{kN}$ ，许用应力 $[\sigma]=100\text{MPa}$ ，主轴内径 $d=350\text{mm}$ ，外径 $D=750\text{mm}$ ，试用第四强度理论校核叶轮主轴的强度。

解： 1、内力分析

$$T = M_e = 9549 N/n = 2388\text{kNm} \quad \text{扭矩}$$

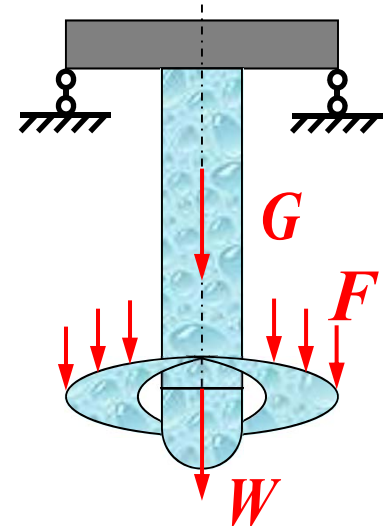
$$F_{\text{合}} = F + G + W = 5300\text{kN} \quad \text{轴力}$$

2、应力分析 $\tau = \frac{T}{W_p} = 30.27\text{MPa}$ $W_p = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16}$

$$\sigma = \frac{F_{\text{合}}}{A} = 15.34\text{MPa} \quad A = \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2)}{4}$$

3、强度计算(拉伸+扭转)

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 54.6\text{MPa} \quad \text{强度足够!}$$



危险点为拉剪应力状态

第九章的基本要求

1. 了解组合变形的概念，理解运用叠加原理求解组合变形问题的思路；
2. 熟练掌握斜弯曲、拉压弯曲、扭转弯曲等典型组合变形强度问题的特点和求解过程。