

第十二章 动载荷

- 概述
- 惯性力问题
- 冲击应力与变形
- 提高构件动强度的措施
- *冲击韧度



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

12-1 概述



静载荷： 载荷由零缓慢增加，到达某值后保持不变；

(Static loading)

动载荷： 引起构件加速度的载荷或冲击载荷；

(Dynamic loading)

动变形和动应力： 在动载荷下产生的变形和应力；

惯性力问题： 已知加速度

冲击问题： 未知加速度（能量守恒）

动载荷问题分类：

疲劳问题： 持续变化的载荷作用

振动问题： （不涉及）

研究基本假设： 动载荷作用下，应力、应变保持线性关系。

12-2 惯性力问题



一、匀加速度直线运动时的应力

静内力: $F_{Nst} = Q$

静应力: $\sigma_{st} = \frac{F_{Nst}}{A} = \frac{Q}{A}$

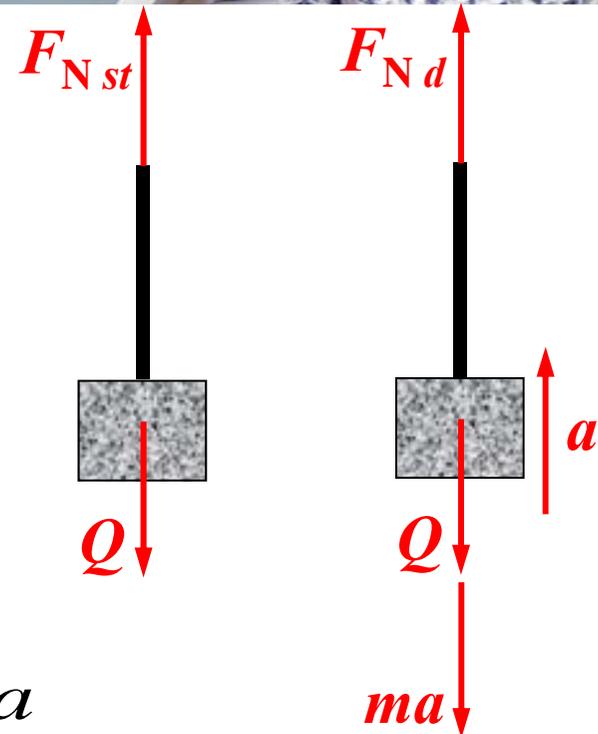
静变形: $\Delta_{st} = \frac{F_{Nst}l}{EA} = \frac{Ql}{EA}$

动内力: $F_{Nd} = Q + ma = Q + \frac{Q}{g}a$

$$= (1 + a/g)Q = K_d F_{Nst}$$

动应力: $\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = (1 + \frac{a}{g}) \frac{Q}{A} = K_d \sigma_{st}$

动变形: $\Delta_d = \frac{F_{Nd}l}{EA} = (1 + \frac{a}{g}) \frac{F_{Nst}l}{EA} = K_d \Delta_{st}$



$$K_d = 1 + a/g$$

动荷因数

12-2 惯性力问题



$$K_d = \frac{F_{Nd}}{F_{Nst}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}$$

动荷因数： 动内力与静内力之比；
动应力与静应力之比；
动变形与静变形之比。

由于构件在静载荷作用下的内力、应力和变形的计算已经掌握，所以在此基础上计算出动荷因数，就可以求解动内力、动应力和动变形了。所以，解决动载荷问题的关键是确定动荷因数。

12-2 惯性力问题



二、匀角速转动时的应力

现研究一个以匀角速度 ω 绕中心旋转的圆环，其平均直径为 D ，截面面积为 A ，材料单位体积的重量为 γ ：

ds 微段上的离心惯性力集度：

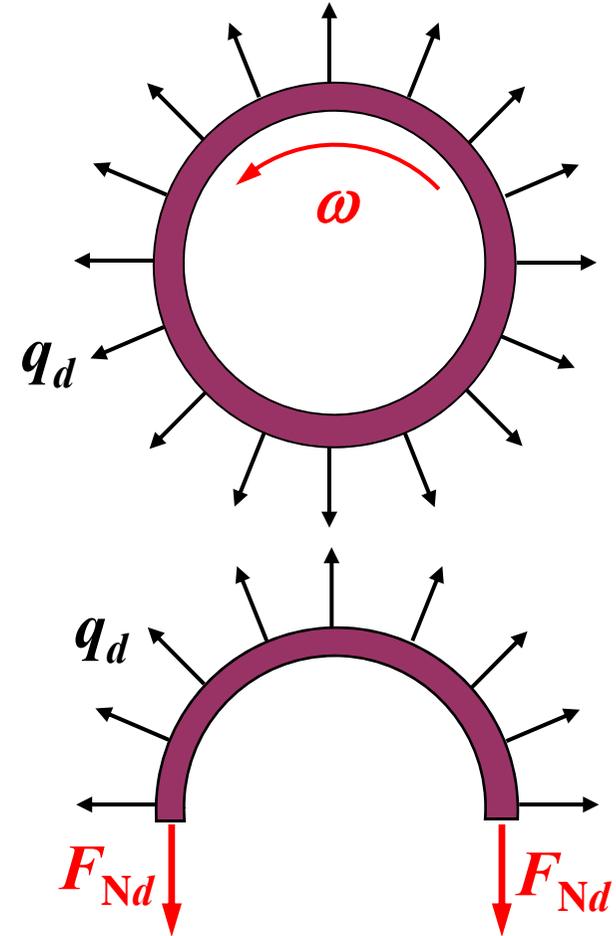
$$\begin{aligned} q_d &= \frac{dF_d}{ds} = \frac{dm \cdot a_n}{ds} \\ &= \frac{A ds \gamma / g}{ds} \cdot \frac{D \omega^2}{2} = \frac{A \gamma D \omega^2}{2g} \end{aligned}$$

横截面动内力：

$$F_{Nd} = \frac{q_d D}{2} = \frac{A \gamma D^2 \omega^2}{4g}$$

横截面动应力：

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{\gamma D^2 \omega^2}{4g}$$



注意：轮缘横截面上的应力与面积无关，所以增加横截面面积无助于飞轮强度的提高！

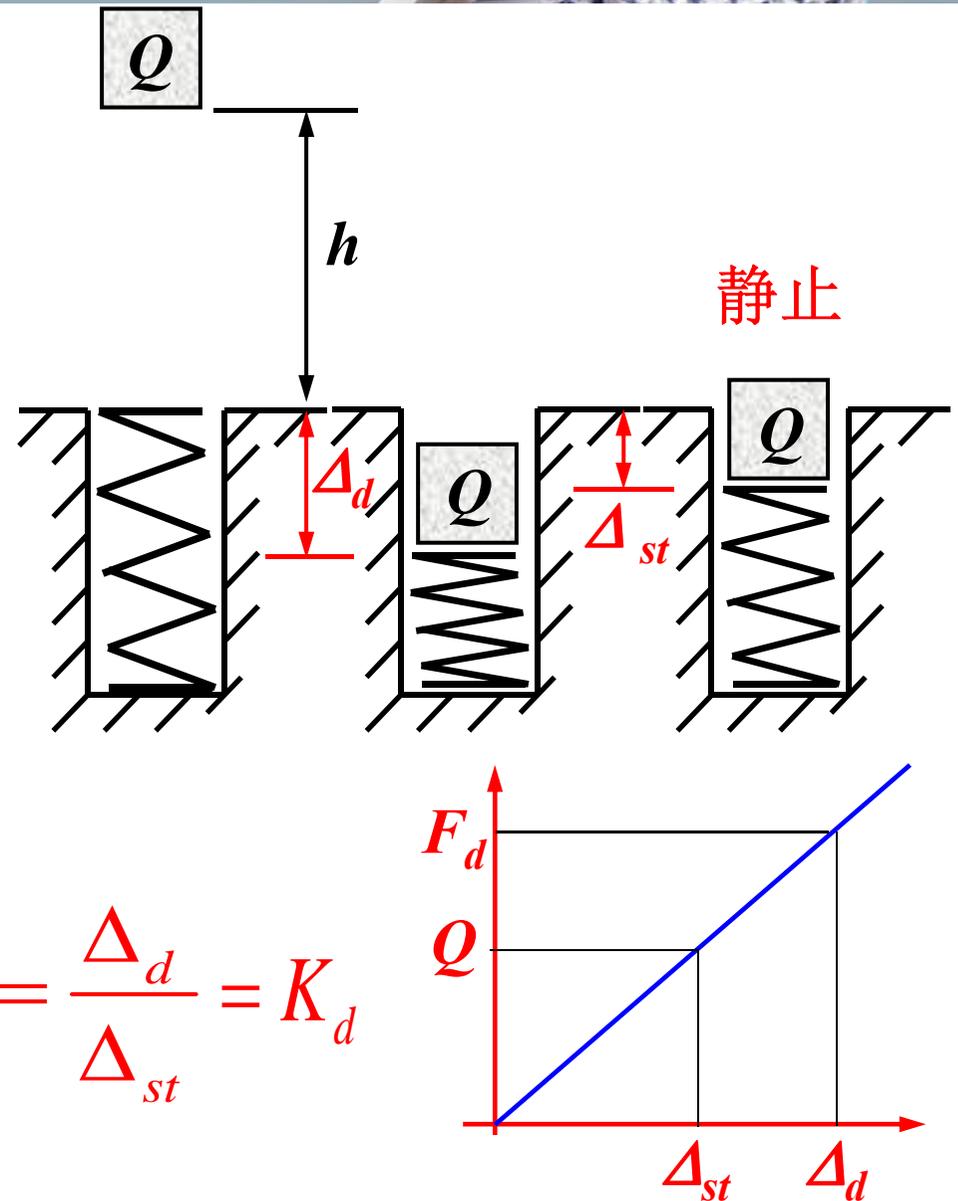
12-3 冲击应力与变形

冲击力学模型的建立:

运动物体与静止物体之间的相互作用称为**冲击**，运动的物体称为**冲击物**，静止的物体称为**被冲击物**。

冲击物对被冲击物作用一个惯性力 F_d ，因而被冲击物发生变形；被冲击物给冲击物一个反作用力，使冲击物的速度减为零。

冲击过程是一个瞬间过程，难以求得加速度值，工程中用能量守恒方法来确定冲击系统的动荷因数。
$$\frac{F_d}{Q} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = K_d$$



12-3 冲击应力与变形



简化假设:

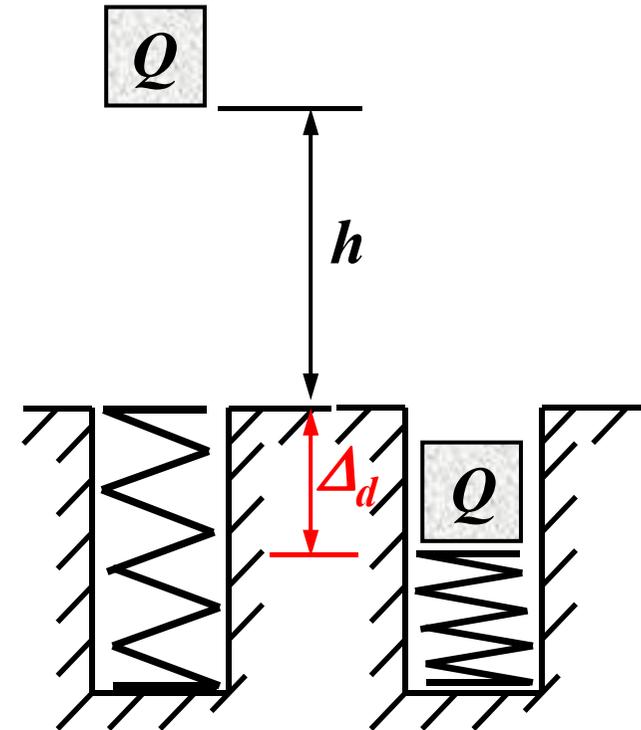
□ 冲击过程中，被冲击物的变形始终处于弹性范围之内；

□ 冲击物为刚性，冲击时冲击物的变形及变形能不计；

□ 支撑被冲击物的支座和基础不变形，不运动，也不吸收能量；

□ 冲击物的质量远远大于被冲击物的质量，被冲击物的势能变化略而不计；

□ 冲击过程能量损失不计。



注意：上述简化，将使计算偏保守。

12-3 冲击应力与变形

一、自由落体冲击

$$\Delta T + \Delta V = \Delta U$$

ΔT 为冲击物的动能减小量

ΔV 为冲击物的势能减小量

ΔU 为被冲击物的变形能增加量

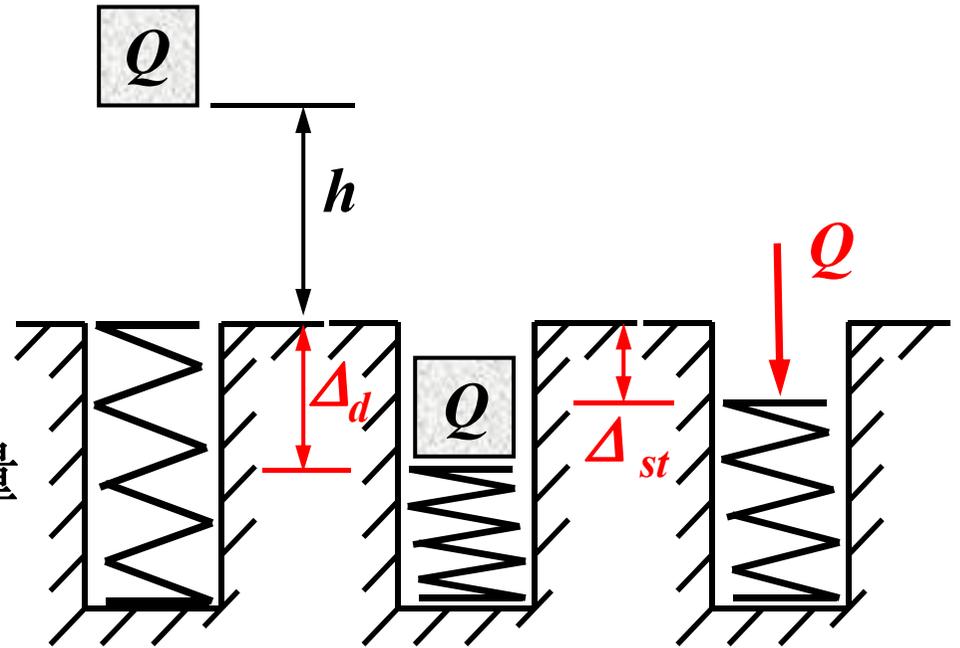
$$\Delta T = 0$$

$$\Delta V = Q(h + \Delta_d) = Q(h + K_d \Delta_{st})$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} F_d \Delta_d = \frac{1}{2} K_d^2 Q \Delta_{st}$$

代入能量守恒表达式，得：

$$K_d^2 \Delta_{st} - 2K_d \Delta_{st} - 2h = 0$$



$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

12-3 冲击应力与变形

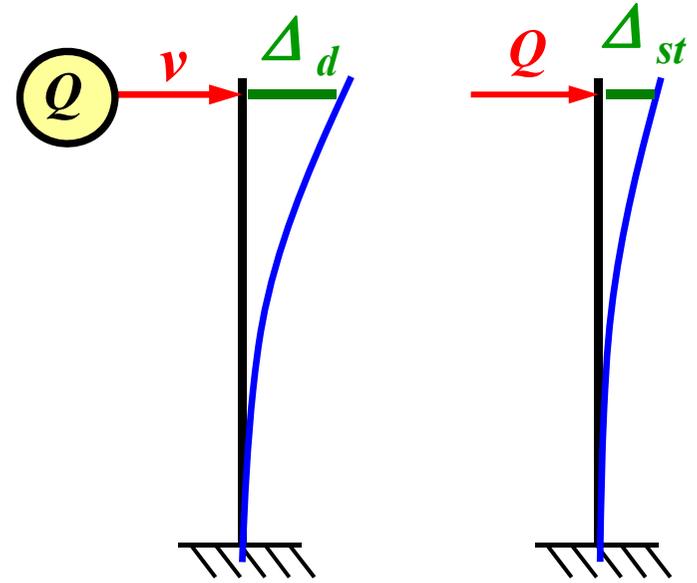
二、水平冲击

$$\Delta T + \Delta V = \Delta U$$

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} v^2 \quad \Delta V = 0$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} P_d \Delta_d = \frac{1}{2} K_d^2 Q \Delta_{st}$$

$$K_d = \frac{v}{\sqrt{g \Delta_{st}}}$$



- 与自由落体冲击相似，理解静变形 Δ_{st} 的含义！
- 公式适用于任何水平冲击线性系统（静定或超静定）。

12-3 冲击应力与变形



三、冲击载荷下的强度条件

■ 试验表明，材料在冲击载荷作用下，其冲击强度比静强度略高一些。

■ 方便起见，建立冲击载荷作用下的光滑构件强度条件时，仍采用静载荷时的许用应力：

$$(\sigma_d)_{\max} = K_d (\sigma_{st})_{\max} \leq [\sigma]$$

$$(\tau_d)_{\max} = K_d (\tau_{st})_{\max} \leq [\tau]$$

■ 上述强度条件，只适用于承受冲击载荷作用的光滑构件，对于带有缺口的构件不适用。试验表明，带有凹槽、缺口或截面尺寸突变的构件，其承受冲击载荷的能力，远小于光滑构件承受冲击载荷的能力，此称之为“缺口效应”。带有缺口的构件，我们暂不研究！

12-3 冲击应力与变形

例 求图示等截面梁的最大动挠度和最大动应力。已知 $a=0.5\text{m}$ ， $h=500\text{mm}$ ，自重 $Q=0.1\text{kN}$ ，弹性模量 $E=200\text{GPa}$ 。梁截面为10#工字钢，惯性矩 $I_z=245\text{cm}^4$ ，工字钢高 $H=100\text{mm}$ 。

解： 1、计算自由落体冲击的动荷因数

$$\Delta_{st}^C = \frac{Q(2a)^3}{3EI_z} = 0.068\text{mm}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{st}^C} = 122.2$$

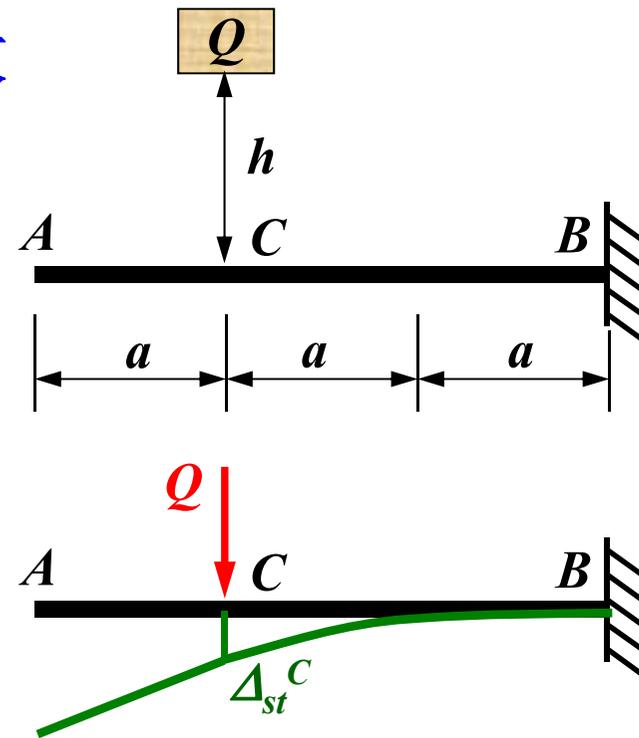
2、计算最大静、动挠度

$$\Delta_{st}^A = \frac{14Qa^3}{3EI_z} = 0.119\text{mm}$$

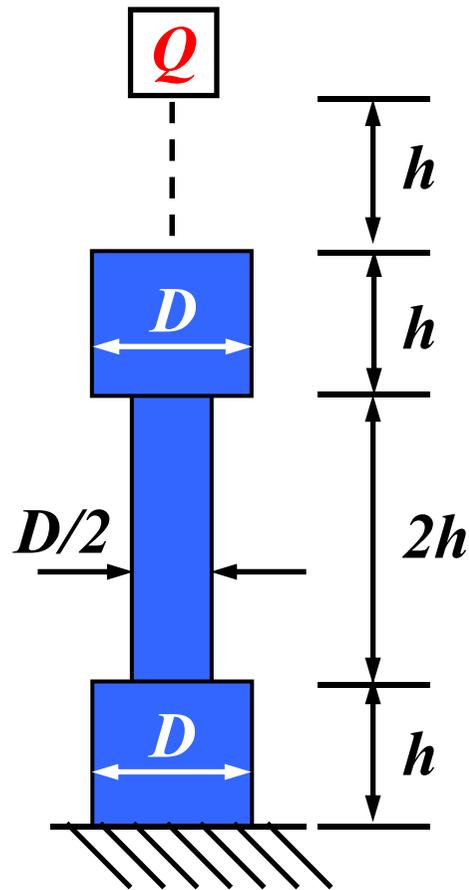
$$\Delta_d^A = K_d \Delta_{st}^A = 14.55\text{mm}$$

3、计算最大静、动应力

$$M_{st}^B = 2Qa \quad \sigma_{st}^B = \frac{M_{st}^B}{I_z} \frac{H}{2} = 2.04\text{MPa} \quad \sigma_d^B = K_d \sigma_{st}^B = 249.4\text{MPa}$$



12-3 冲击应力与变形



例 已知变截面（圆截面）的立柱受到自由落体冲击，试计算立柱的最大动应力和动变形。已知立柱材料的弹性模量为 E 。

解：1、计算动荷因数 $K_d \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}}$

$$\Delta_{st} = \frac{2Qh}{E \frac{\pi}{4} D^2} + \frac{2Qh}{E \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{40Qh}{\pi E D^2} \quad K_d \approx \sqrt{\frac{\pi E D^2}{20Q}}$$

2、计算最大静、动应力

$$\sigma_{st \max} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{16Q}{\pi D^2}$$

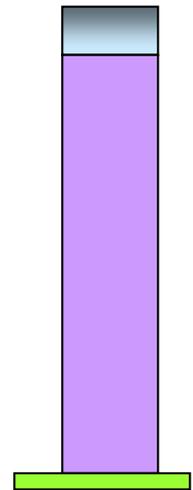
$$\sigma_{d \max} = K_d \sigma_{st \max} = \frac{8}{5D} \sqrt{\frac{5EQ}{\pi}}$$

3、计算动变形 $\Delta_d = K_d \Delta_{st} = \frac{4h}{D} \sqrt{\frac{5Q}{\pi E}}$

12-4 提高构件动强度的措施

具体措施：

- ◆ 减小冲击高度或互相接触构件之间的间隙；
- ◆ 在保证静强度的前提下，尽量采用弹性模量较小的材料，或者可能时加软垫、弹簧等；
- ◆ 在不降低静强度的前提下，尽量增大静变形；
- ◆ 避免采用脆性材料；
- ◆ 冲击对应力集中很敏感，应避免采用有凹槽、缺口、截面突变的构件。



第十二章的基本要求



1. 明确动载荷的概念，了解动载荷问题的求解思路；
2. 掌握自由落体冲击和水平冲击时动荷因数的计算；
3. 了解提高构件承受冲击能力的途径。

第十三章 疲劳强度

- 疲劳破坏的概念
- 交变应力及其循环特征
- 材料的疲劳极限
- 对称循环下构件的疲劳极限
- 非对称循环下构件的疲劳极限
- 构件的疲劳强度条件
- *构件的疲劳寿命估算简介
- 提高构件疲劳强度的措施



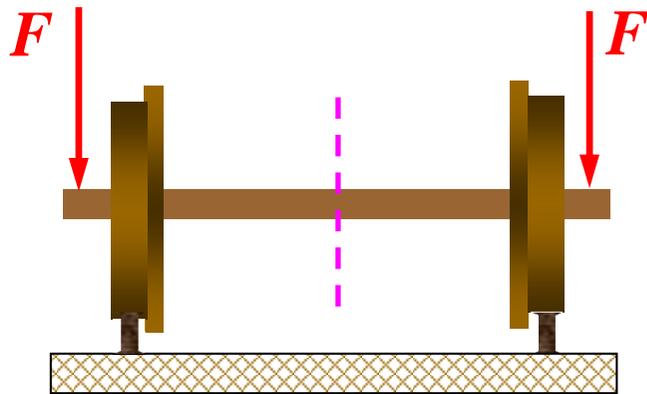
西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

13-1 疲劳破坏的概念

- 随时间发生周期性变化的载荷称为**交变载荷**。
- 构件在**交变载荷**的作用下，应力也随时间发生周期性变化，此种应力称为**交变应力**。

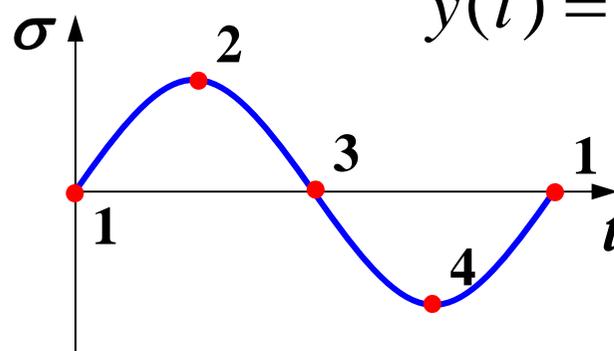
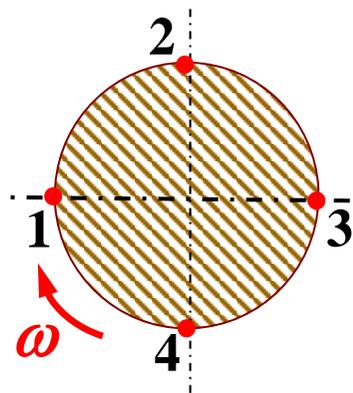


$$F = F(t) = F(t + T)$$

$$\sigma = \sigma(t) = \sigma(t + T)$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y(t)$$

$$y(t) = R \sin \omega t$$



13-1 疲劳破坏的概念



- **应力循环**：交变应力每重复变化一次的过程。
- **疲劳破坏**：构件在交变应力的作用下发生的破坏。
- **疲劳强度 (Fatigue Strength)**：构件抵抗疲劳破坏的能力。
- **疲劳破坏的主要特点**：

1. 疲劳破坏是一个损伤积累的过程，要经历一定次数的应力循环；

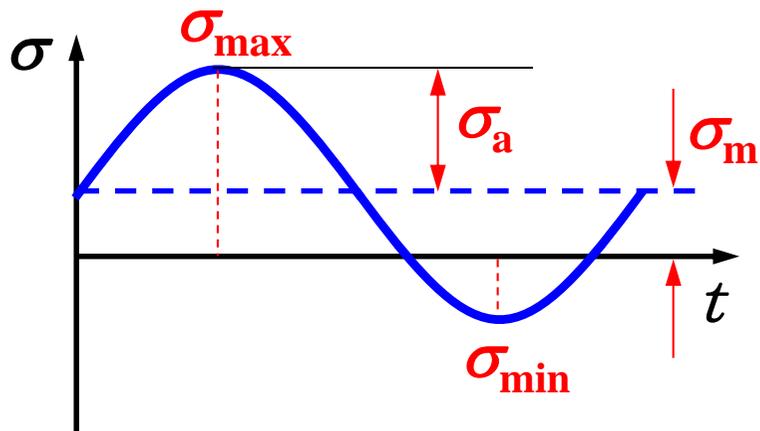
2. 疲劳强度远小于材料的强度极限，甚至小于屈服极限；

3. 无论塑性材料还是脆性材料，疲劳破坏时都发生脆性断裂，无明显塑性变形，所以危害极大；

4. 疲劳断口具有明显的特征，有光滑区和粗糙区两个区域。

13-2 交变应力及其循环特征

如何描述交变应力:



最大应力: σ_{\max}

最小应力: σ_{\min}

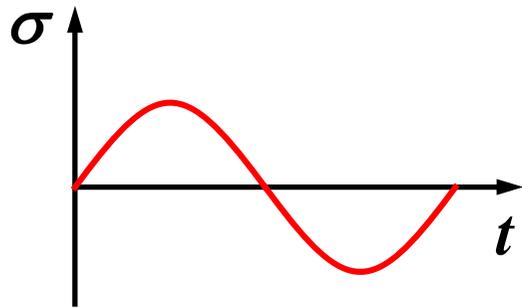
平均应力: $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$

应力幅: $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$

循环特征: 最小应力与最大应力的比值

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

13-2 交变应力及其循环特征



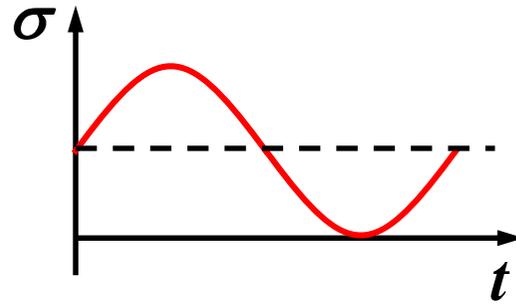
对称循环

$$r = -1$$

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$$

$$\sigma_m = 0$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$$



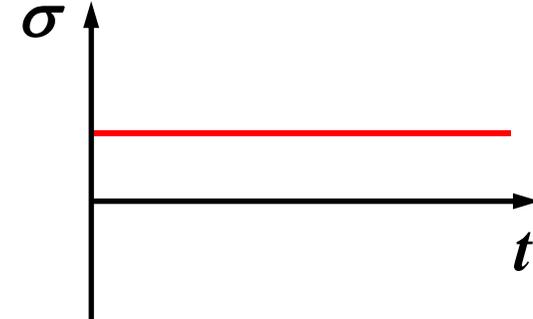
脉动循环

$$r = 0$$

$$\sigma_{\max} \neq 0$$

$$\sigma_{\min} = 0$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_{\max}$$



静应力

$$r = 1$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$$

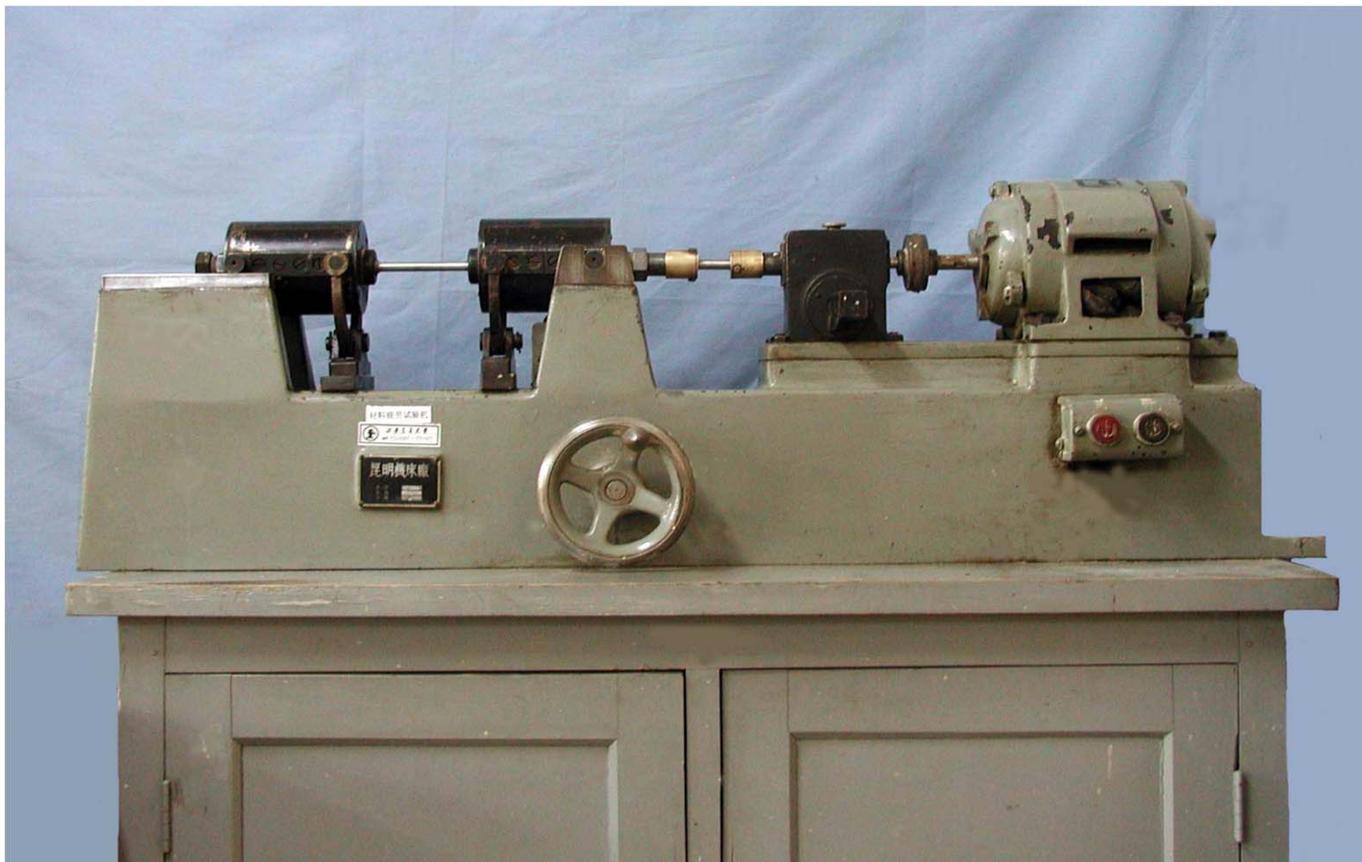
$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_m = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$$

应力幅不随时间发生改变的交变应力称为等幅交变应力，反之称为变幅交变应力。

13-3 材料的疲劳极限

- 材料可以经受无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最高应力值称为**材料的持久极限（疲劳极限）**。
- 材料的持久极限通过**疲劳试验**来确定。

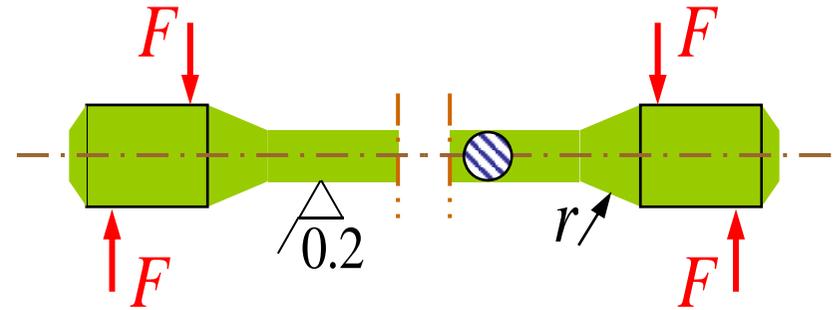


13-3 材料的疲劳极限

设备：旋转弯曲疲劳试验机

试件：标准光滑小试件

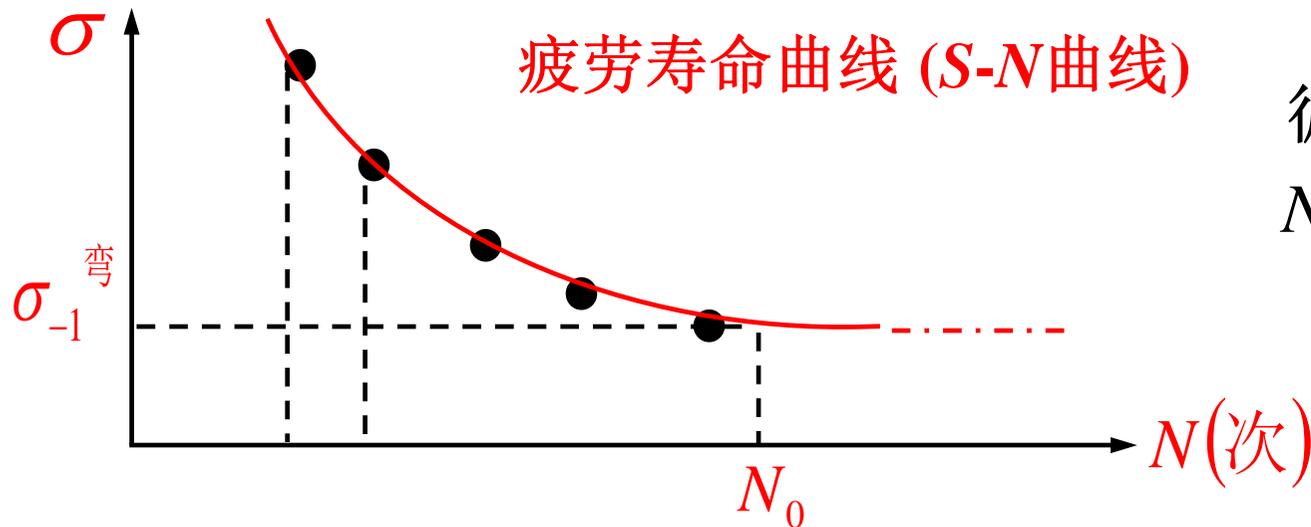
- 数量为 8~10 根；
- $d = 6 \sim 10\text{mm}$ ；
- 试件表面光滑。



试验过程：

材料的持久极限

$\sigma_{-1}^{\text{弯}}$



13-3 材料的疲劳极限



材料的持久极限与静载荷下强度极限的经验关系：

● 一般钢及常用合金钢：

$$\sigma_{-1}^{\text{弯}} = (0.42 \sim 0.46) \sigma_b$$

$$\tau_{-1}^{\text{扭}} = (0.25 \sim 0.27) \tau_b$$

$$\sigma_{-1}^{\text{拉压}} = (0.32 \sim 0.37) \sigma_b$$

● 铸钢，可锻铸铁及铜合金：

$$\sigma_{-1}^{\text{弯}} = (0.3 \sim 0.4) \sigma_b$$

注意：同一种材料在不同应力循环下的持久极限将会不同，其中对称循环下的持久极限最低。

13-4 对称循环下构件的疲劳极限



- 构件的疲劳强度不仅与材料相关，而且与构件的结构相关。

- 所以构件的持久极限与材料的持久极限不相等。

- 影响构件持久极限的基本因素

1. 应力集中： 构件截面尺寸变化造成的应力集中；

2. 构件尺寸： 截面尺寸增大造成的裂纹萌生几率增加；

3. 表面质量： 表面加工痕迹造成的应力集中。

13-4 对称循环下构件的疲劳极限

● 若为对称循环：

$$\sigma_{-1}^{\text{构}} = \frac{\varepsilon_{\sigma} \beta}{K_{\sigma}} \sigma_{-1}$$

$$\tau_{-1}^{\text{构}} = \frac{\varepsilon_{\tau} \beta}{K_{\tau}} \tau_{-1}$$

$\sigma_{-1}^{\text{构}}$ ：构件的持久极限

σ_{-1} ：材料（光滑小试样）的持久极限

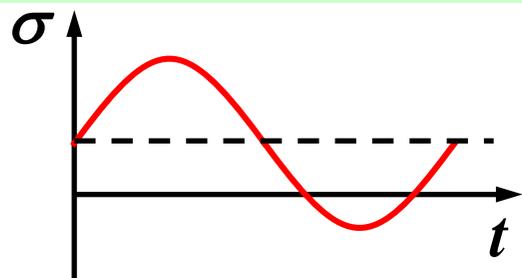
K_{σ} ：有效应力集中因数，其值大于1（与材料和构件形状相关）

ε_{σ} ：构件尺寸因数，其值小于1（与材料和构件尺寸相关）

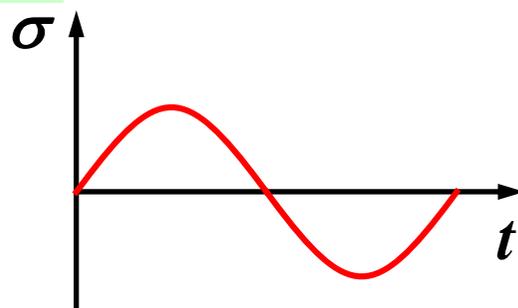
β ：表面质量因数（与材料和表面光洁度相关）

13-5 非对称循环下构件的疲劳极限

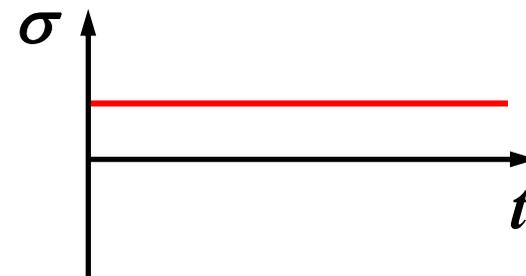
● 若为非对称循环:



$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$$



ψ_σ : 敏感因数 (与材料相关)



$$\sigma_r^{\text{构}} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} (\sigma_a + \sigma_m)$$

$$\tau_r^{\text{构}} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} (\tau_a + \tau_m)$$

13-6 构件的疲劳强度条件



● 若为对称循环:

$$\sigma_{\max}^{\text{工作}} = \sigma_a$$

$$\sigma_{-1}^{\text{构}} = \frac{\varepsilon_{\sigma} \beta}{K_{\sigma}} \sigma_{-1}$$

$$\sigma_a \leq \left[\sigma_{-1}^{\text{构}} \right] = \frac{\sigma_{-1}^{\text{构}}}{[n]}$$

最大工作应力不得大于许用应力!

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}^{\text{构}}}{\sigma_a} \geq [n]$$

实际安全因数不得小于规定安全因数!

(n_{σ} 称为实际安全系数, $[n_{\sigma}]$ 称为规定安全系数)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta} \sigma_a} \geq [n]$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta} \tau_a} \geq [n]$$

13-6 构件的疲劳强度条件



● 若为非对称循环： $\sigma_{\max}^{\text{工作}} = \sigma_a + \sigma_m$

$$\sigma_a + \sigma_m \leq \left[\sigma_{-1}^{\text{构}} \right] = \frac{\sigma_{-1}^{\text{构}}}{[n]}$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}^{\text{构}}}{\sigma_a + \sigma_m} \geq [n]$$

$$\sigma_r^{\text{构}} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} (\sigma_a + \sigma_m)$$

实际安全系数不得小于规定安全系数！

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} \geq [n]$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} \geq [n]$$

13-6 构件的疲劳强度条件



● 若为塑性材料，当 $\sigma_a \ll \sigma_m$ 或 r 接近1时：构件首先发生的是屈服破坏，故应校核屈服强度。

● 若为塑性材料，当 $0 < r < 1$ 时：构件破坏形式可能为屈服破坏，或可能为疲劳破坏，故应同时校核屈服和疲劳强度。

● 若为弯扭组合疲劳，分别算出弯曲的 n_σ 和扭转的 n_τ ，再计算总体安全系数：

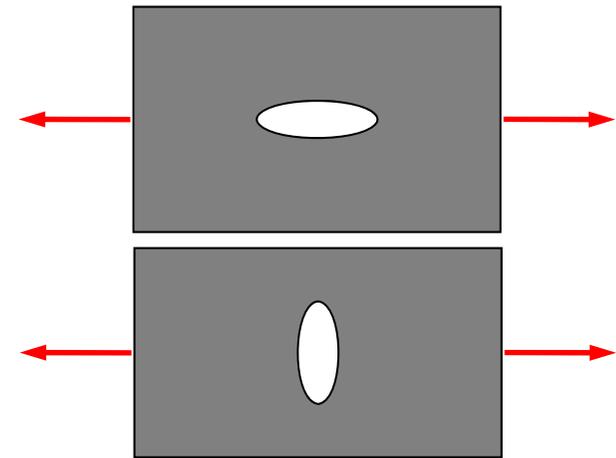
$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n]$$

13-8 提高构件疲劳强度的措施



一、合理设计构件形状，减小应力集中：

- 使截面的尺寸不发生突跳；
- 增加过渡圆角；
- 将孔槽等设置在低应力区，合理选择其形状。



二、提高表面质量，降低表层应力集中系数：

- 提高构件表面光洁度；
- 进行表面处理，提高表层材料的持久极限，如热处理有渗碳、淬火，冷处理有喷丸、滚压、预变形等。

三、合理选择材料。

第十三章的基本要求



1. 了解疲劳强度的概念，如交变应力、疲劳破坏的特点等；
2. 掌握最大应力、最小应力、平均应力、应力幅和循环特征等概念及其简单计算；
3. 理解材料和构件持久极限的概念，掌握交变应力作用下构件的强度条件；
4. 了解提高构件疲劳强度的主要措施。

第十四章 压杆的稳定

- 概述
- 细长压杆的临界力
- 压杆的临界应力
- 压杆的稳定性校核
- 提高压杆稳定性的措施

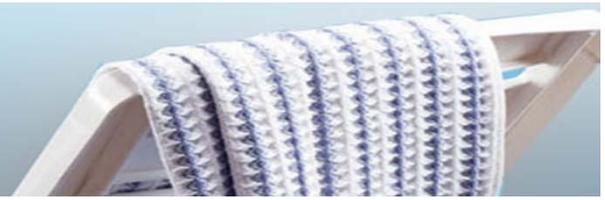


西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

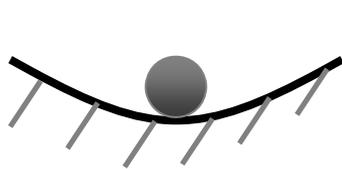
14-1 概述



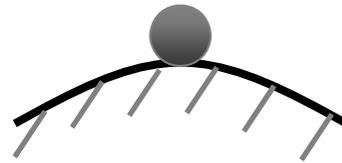
构件承载能力：强度、刚度、稳定性

弹性平衡的稳定性概念：

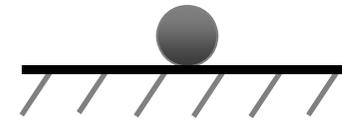
刚体平衡



稳定平衡

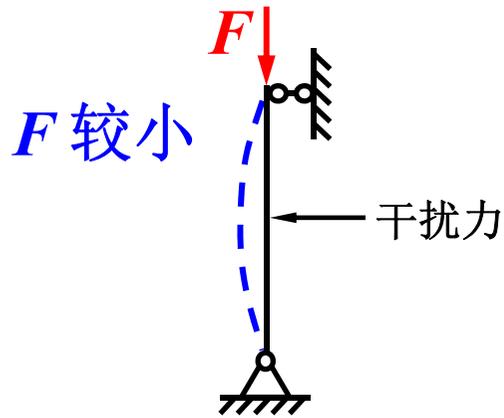


不稳定平衡

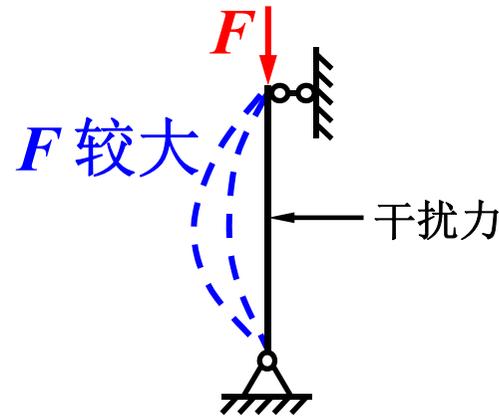


随遇平衡

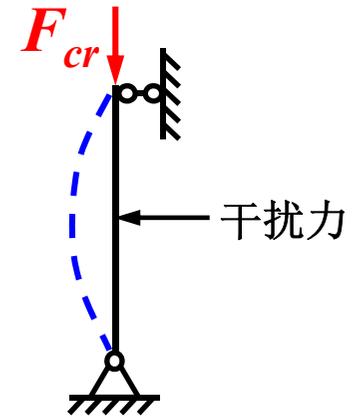
压杆平衡



稳定平衡



不稳定平衡



随遇平衡

14-1 概述



□ 平衡系统受到干扰偏离平衡位置，若去除干扰系统能够自动恢复原有的平衡状态，则称为**稳定平衡(Stable Equilibrium)**；否则称为**不稳定平衡(Unstable Equilibrium)**。

□ **稳定性(Stability)**：弹性体保持原有平衡状态的能力。

□ **失稳(Buckling, 屈曲)**：弹性体丧失初始平衡状态的现象。

□ 压杆由稳定平衡过渡到不稳定平衡时，轴向压力的临界值成为**临界力或临界载荷(Critical Load)**，用 F_{cr} 表示。

□ **临界力是压杆承载能力的指标：**

$F < F_{cr}$ ，压杆稳定；

$F > F_{cr}$ ，压杆不稳定(失稳)

F_{cr} 是压杆稳定的最大压力；

F_{cr} 是压杆失稳的最小压力。

□ 压杆的失稳往往是很突然发生的，所以危害较大。

14-2 细长压杆的临界力



一、两端铰支的细长压杆

$$M(x) = -F_{cr} v(x) = EI v''(x)$$

$$v'' + k^2 v = 0 \quad k^2 = F_{cr} / EI$$

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

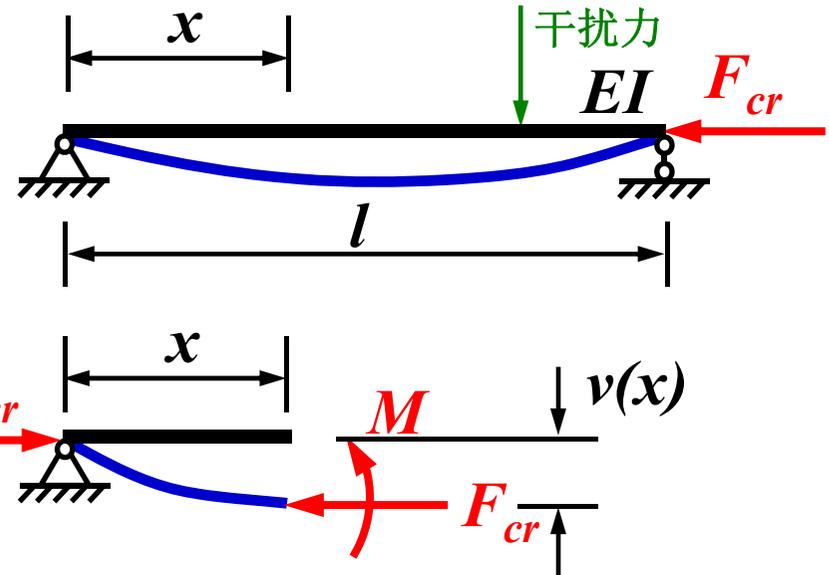
$$x = 0 : v = 0 \quad C_2 = 0$$

$$x = l : v = 0 \quad C_1 \sin kl = 0$$

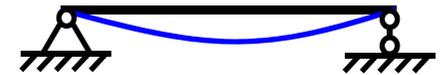
$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



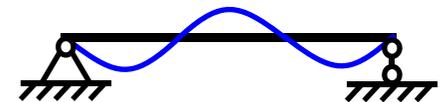
$$n = \pm 1$$



$$n = \pm 2$$



$$n = \pm 3$$



欧拉公式 (Euler, 1757)

14-2 细长压杆的临界力

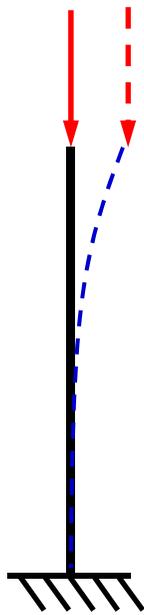


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

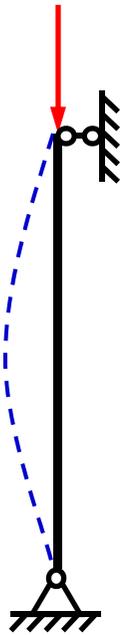


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

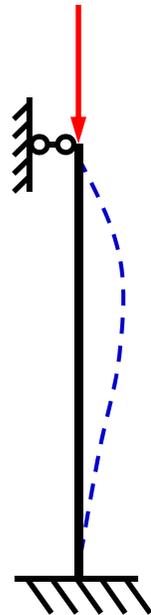
μ : 长度因数
(支座系数,
长度系数,
约束系数)



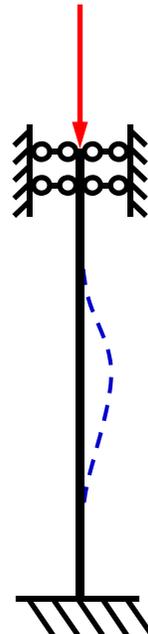
一端固定
一端自由
 $\mu = 2$



两端铰支
 $\mu = 1$



一端固定
一端铰支
 $\mu = 0.7$



两端固定
 $\mu = 0.5$

长度因数也可由临界失稳后正弦半波长长度, 与两端铰支压杆临界失稳时的正弦半波长长度的比值确定。

注意: 刚度越大, 杆长越短, 约束越强, 临界力越大, 压杆越不易失稳。

14-3 压杆的临界应力



一、细长压杆的临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

惯性半径
(回转半径)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

柔度 (长细比)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

欧拉公式

注意1: 柔度越大, 临界应力越小, 压杆越易失稳。

注意2: 在计算临界应力时, 压杆总是在最容易发生弯曲的方向上失稳, 故轴惯矩应取最小值, 柔度应取最大值。

14-3 压杆的临界应力



例 两端球铰支座的细长压杆，横截面为矩形，杆长为 $L=300\text{mm}$ ，弹性模量为 $E=200\text{GPa}$ ，试求其临界力和临界应力。材料屈服极限 $\sigma_s=240\text{MPa}$ 。

解： 失稳形式的判断：

$$I_z = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166.67 \text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{10 \times 2^3}{12} = 6.67 \text{mm}^4$$

$I_z > I_y$ ，故将以 y 轴
为中性轴弯曲失稳

两端球铰支座： $\mu = 1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu L)^2} = 146 \text{N} \quad \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = 7.3 \text{MPa}$$

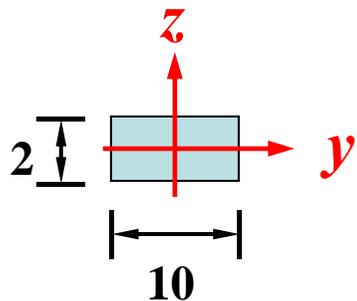
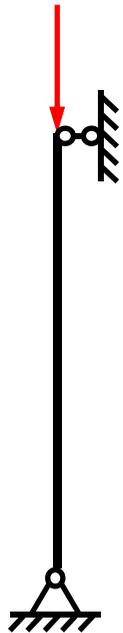
讨论1： 若与强度条件确定的许可载荷相比？

$$F_s = \sigma_s A = 240 \times 20 = 4800 \text{N}$$

稳定性条件比强度条件苛刻！

$$\frac{F_s}{F_{cr}} = 32.9$$

讨论2： 选用矩形截面的压杆，合适吗？



14-3 压杆的临界应力

例 两端球铰支座的细长压杆，横截面有两种形式， $L=1.5\text{m}$ ， $E=200\text{GPa}$ ，试求其临界应力。

解： 1. 实心圆截面

2. 空心圆截面

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 3.07 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 4.30 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 1.88 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = 119.9$$

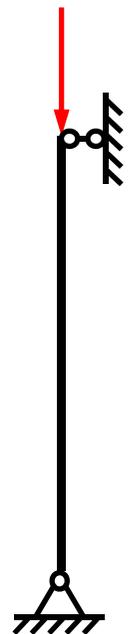
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 99.2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 137.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 200.6 \text{ MPa}$$

1. 
 $d = 50\text{mm}$

2. 
 $d = 25\text{mm}$
 $D = 55\text{mm}$



讨论：比较两种截面形式，哪一种好？

空心截面的压杆，其稳定性较实心截面好！

14-3 压杆的临界应力



二、欧拉公式的适用条件

$M(x) = EI v''(x)$ 材料必须处在线弹性范围内!

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad \longrightarrow \quad \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$

(λ_p 只与材料相关, 为能使用欧拉公式的柔度最小值)

Q235 钢: $E = 206\text{GPa}, \sigma_p = 200\text{MPa}, \lambda_p \approx 100$

将 $\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆称为**细长杆** (或**大柔度杆**)。

强调: 只有细长杆 (即 $\lambda \geq \lambda_p$ 时) 才能使用欧拉公式来计算临界力和临界应力。

14-3 压杆的临界应力



三、经验公式及适用条件

当 $\lambda < \lambda_p$ 时，欧拉公式不再适用！如何计算临界力和临界应力？

直线公式： $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ (a 、 b 为材料常数)

适用条件： $\sigma_p \leq \sigma_{cr} = a - b\lambda \leq \sigma_s$

随着柔度的减小，临界应力增大，最大不能大于材料的破坏应力！

$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$ $\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$ (只与材料相关，为能使用直线公式的柔度最小值)

Q235 钢： $a = 304\text{MPa}$, $b = 1.118\text{MPa}$, $\lambda_s = 61.7$

将 $\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ 的压杆称为**中长杆** (或**中柔度杆**)

强调： 中长杆 (即 $\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ 时) 使用直线公式来计算临界应力。

将 $\lambda \leq \lambda_s$ 的压杆称为**短粗杆** (或**小柔度杆**)

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

14-3 压杆的临界应力

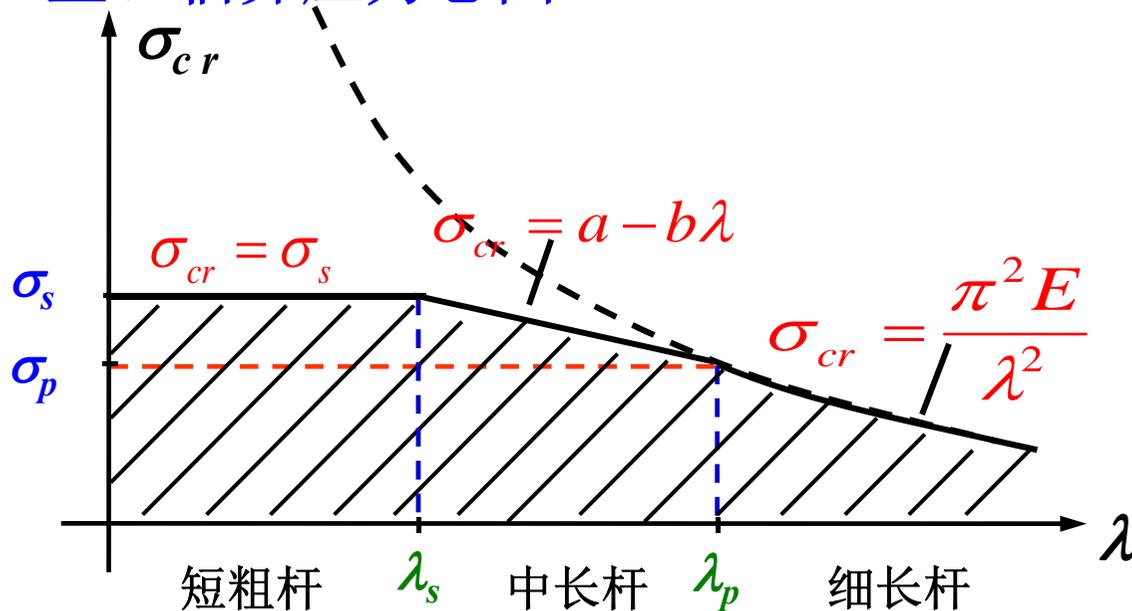


四、压杆的分类

$\lambda \geq \lambda_p$	细长杆	$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	(欧拉公式)
$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$	中长杆	$\sigma_{cr} = a - b\lambda$	(直线公式)
$\lambda \leq \lambda_s$	短粗杆	$\sigma_{cr} = \sigma_s$	(强度公式)

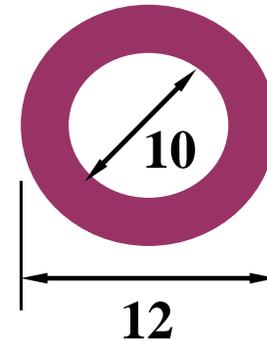
注意：若压杆为脆性材料，上述 λ_s 换为 λ_b 、 σ_s 换为 σ_b ！

五、临界应力总图



14-3 压杆的临界应力

例 计算图示压杆的临界载荷。已知：材料为Q 235钢， $E = 210\text{GPa}$ 。



解：

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4) / 64}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2} = 3.9 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 380}{3.9} = 97.4 \quad \lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p \quad \text{中柔度杆}$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1.12 \times 97.4 = 195 \text{ MPa}$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = \sigma_{cr} \cdot \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2)}{4} = 6.739 \text{ kN}$$

讨论：如果误认为是大柔度杆，会怎样？

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2)}{4} = 7.55 \text{ kN} \quad \text{偏于危险}$$

14-4 压杆稳定性的校核

一、安全因数法（常用）

$[n_{st}]$ 规定稳定安全因数

$$|\sigma| \leq \frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]} \quad |F_N| \leq \frac{F_{cr}}{[n_{st}]} \quad n_{st} = \frac{F_{cr}}{|F_N|} = \frac{\sigma_{cr}}{|\sigma|} \geq [n_{st}] \quad n_{st} \text{ 实际稳定安全因数}$$

$$[n_{st}] = 1.8 \sim 3.0 \quad \text{钢材}$$

$$[n_{st}] = 5.0 \sim 5.5 \quad \text{铸铁}$$

$$[n_{st}] = 2.8 \sim 3.2 \quad \text{木材}$$

稳定安全因数一般大于强度安全因数，这是因为工程实际中载荷的偏心、压杆的初曲率、材料的不均匀、支座的缺陷等因素是不可避免。

二、折减系数法

$$\frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]} = [\sigma_{st}] \quad [\sigma_{st}] = \varphi[\sigma]$$

$$|\sigma| = \frac{|F_N|}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

$$|F_N| \leq \varphi[\sigma]A$$

φ 为折减系数，与柔度和材料相关，查表得到。

压杆的稳定性是对压杆整体而言的，因此截面有局部削弱对压杆的稳定性影响很小，但是此时需校核局部削弱处的压缩强度！

14-4 压杆稳定性的校核

例 校核图示结构的稳定性。已知: $d_1 = d_2 = 48\text{mm}$, $F = 100\text{kN}$, 材料为Q 235钢, $E = 200\text{ GPa}$, $[n_{st}] = 3.0$ 。

解: 1. 结构分析, 压杆的轴力:

$$F_{N1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F = -86.6\text{ kN} \quad F_{N2} = -\frac{F}{2} = -50\text{ kN}$$

2. 计算柔度 λ :

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 \quad i_1 = i_2 = d/4 = 12\text{ mm} \quad l_1 = 1\text{ m}, \quad l_2 = 1.732\text{ m}$$

$$\lambda_1 = 1 \times 1000 / 12 = 83.3 \text{ 中长杆}$$

$$\lambda_2 = 1 \times 1732 / 12 = 144.3 \text{ 细长杆}$$

3. 计算临界应力和临界力:

$$\sigma_{cr1} = a - b\lambda_1 = 210.7\text{ MPa}$$

$$\sigma_{cr2} = \pi^2 E / \lambda_2^2 = 94.8\text{ MPa}$$

$$F_{cr1} = \sigma_{cr1} A_1 = 381.3\text{ kN}$$

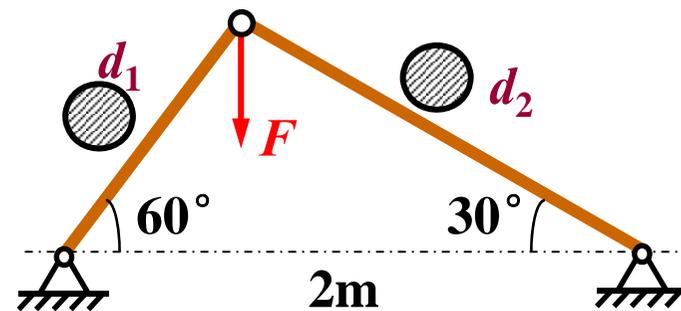
$$F_{cr2} = \sigma_{cr2} A_2 = 171.5\text{ kN}$$

4. 稳定性校核:

$$n_{st1} = \frac{F_{cr1}}{|F_{N1}|} = \frac{381.3}{86.6} = 4.4 > [n_{st}]$$

$$n_{st2} = \frac{F_{cr2}}{|F_{N2}|} = \frac{171.5}{50} = 3.43 > [n_{st}]$$

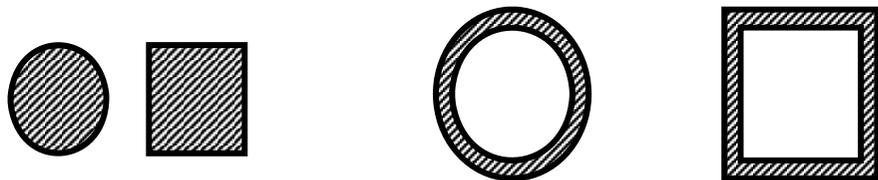
结构是稳定的!



14-5 提高压杆稳定性的措施

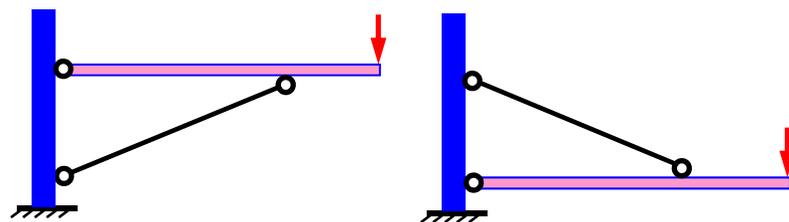
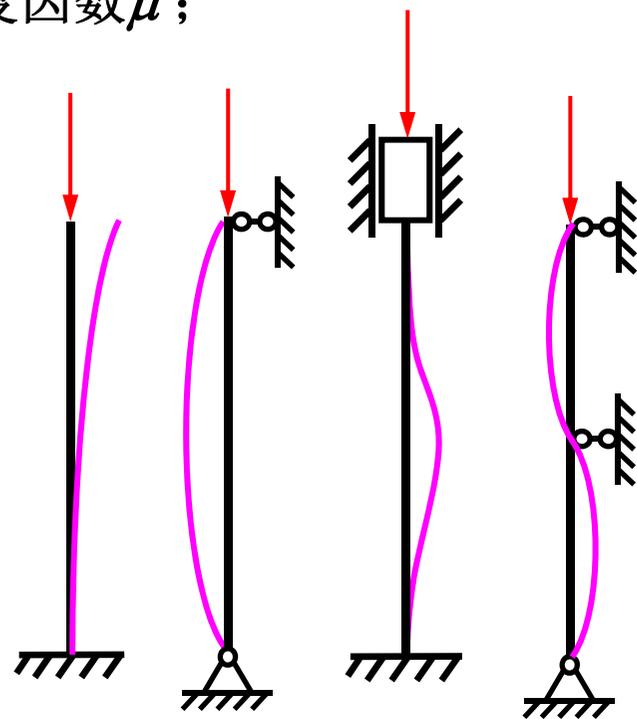
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \sigma_{cr} = a - b\lambda \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- 改善支座形式，增加压杆的约束，减小长度因数 μ ；
- 缩短压杆长度，或增加中间支座；
- 合理选择截面形状，增大惯性半径 i ；



- 采用等稳定性结构，使 $\lambda_y = \lambda_z$ ；
- 改变结构布局，变压杆为拉杆；
- 选择合理的材料：

细长杆：高弹性模量材料
 中长杆：高强度材料



第十四章的基本要求



1. 了解弹性平衡稳定性的概念；
2. 熟练掌握几种常见杆端约束的长度因数，熟练掌握惯性半径、柔度的计算；
3. 熟练掌握三种类型压杆的判断，掌握其稳定性计算；
4. 了解提高压杆稳定性的措施。

第十五章 联接件的强度

- 联接件的实用算法
- 实用算法应用



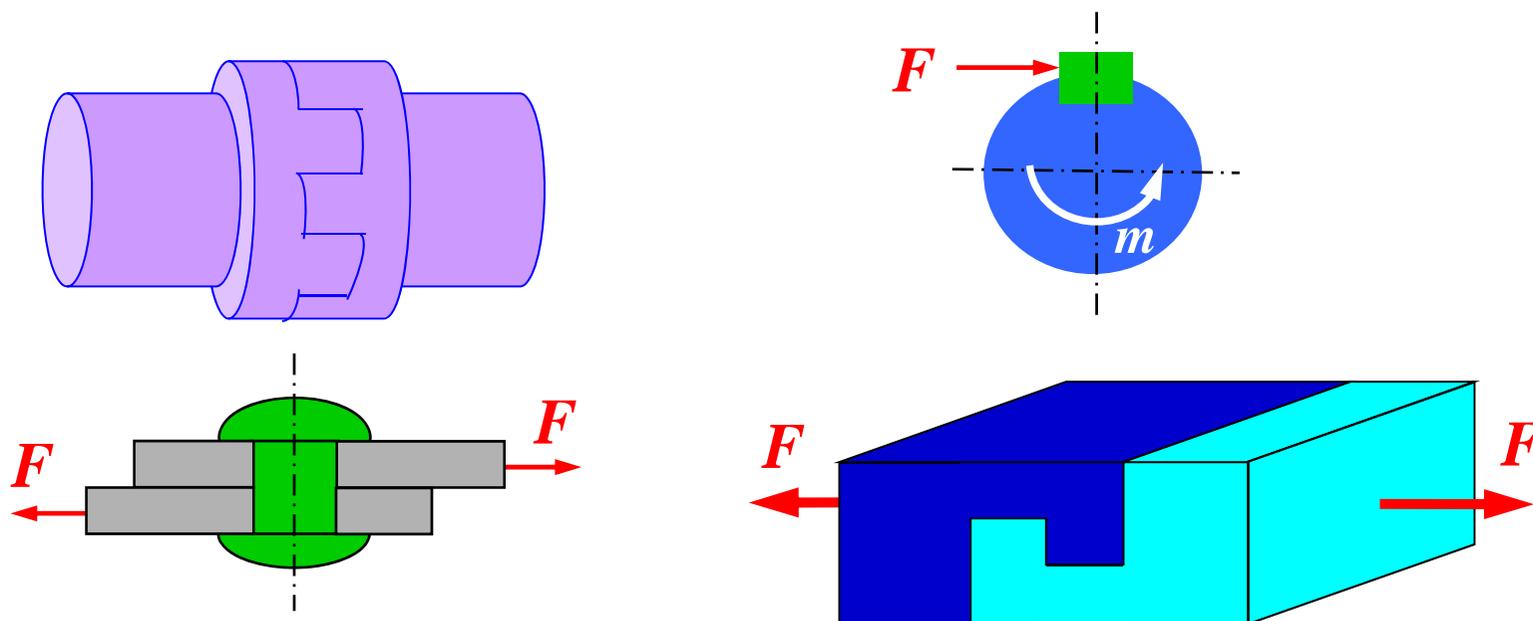
西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

15-1 联接件的实用算法

- 工程上经常遇到联接件，如连轴器、键、铆钉、销钉、螺栓等。



- 这些构件都不是细长杆件，其变形较为复杂，并非单一的基本变形，受力也比较复杂。所以通过理论分析进行精确计算十分困难。

15-1 联接件的实用算法

第一步：根据联接件实际破坏情况

- 对受力、应力分布进行简化和假设
- 建立“名义应力公式”
- 计算联接件的名义工作应力

第二步：对同类联接件进行破坏试验

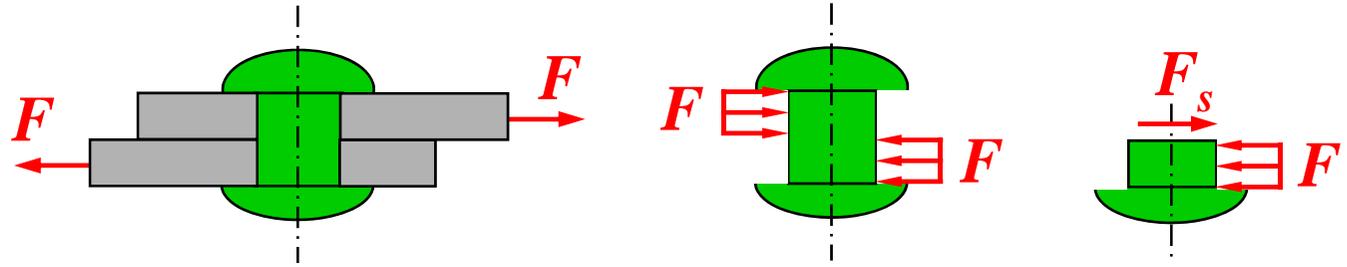
- 得到极限载荷
- 按“名义应力公式”计算名义极限应力
- 考虑安全系数，得到名义许用应力

第三步：强度校核：**名义工作应力 ≤ 名义许用应力**

15-1 联接件的实用算法

一、剪切破坏

铆钉联接



受力特点：外力垂直于轴线，等值反向，相距较近。

变形特点：截面沿外力的方向产生相对错动。 **剪切变形**

实用计算方法：由于剪力在截面上分布复杂，精确的切应力很难得到，因此假设剪力在截面上均匀分布

$$\tau = \frac{F_s}{A_j} \quad \text{名义工作切应力}$$

15-1 联接件的实用算法



名义许用切应力

名义极限切应力 $\tau^{\circ} = \frac{F_s^{\circ}}{A_j}$

与名义切应力相同的算法

名义许用切应力 $[\tau] = \frac{\tau^{\circ}}{n}$

n 为安全因数

$$[\tau] = (0.6 - 0.8)[\sigma]$$

剪切强度条件:

$$\tau = \frac{F_s}{A_j} \leq [\tau]$$

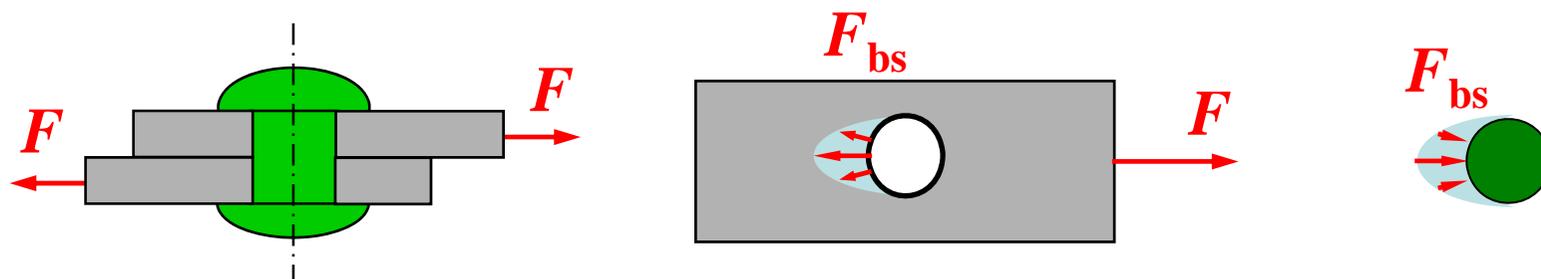
注意:

- 1、正确确定剪力(受力平衡)
- 2、正确确定剪切面(与外力平行)

15-1 联接件的实用算法

二、挤压破坏

在联接件和被联接件之间产生了较大压力，造成联接件或被联接件产生局部塑性变形，这种作用称为**挤压**。



构件在发生剪切作用的同时一般要伴随挤压作用。

挤压破坏：当压力过大时，铆钉或板接触处将产生塑性变形或压溃。

联接件和被联接件相互挤压的接触面称为**挤压面**，接触面上的作用力称为**挤压力**（用 F_{bs} 表示）。

15-1 联接件的实用算法

实用计算方法:

假设挤压力在挤压面上均匀分布。

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

σ_{bs} 挤压应力

F_{bs} 挤压力

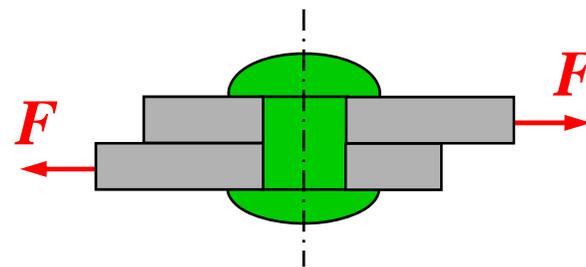
A_{bs} 挤压面面积

$[\sigma_{bs}]$ 许用挤压应力

$[\sigma_{bs}] = 1.7 - 2.0[\sigma]$

三、拉压破坏

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{净}}} \leq [\sigma] \quad A_{\text{净}} = (b - D)t$$



15-2 实用算法应用



键的强度计算

外力

$$F = F' = \frac{m}{r}$$

1、剪切强度

剪力

$$F_s = F = \frac{m}{r}$$

剪切面面积

$$A_j = bL$$

剪切强度

$$\tau = \frac{m}{rbL} \leq [\tau]$$

2、挤压强度

挤压力

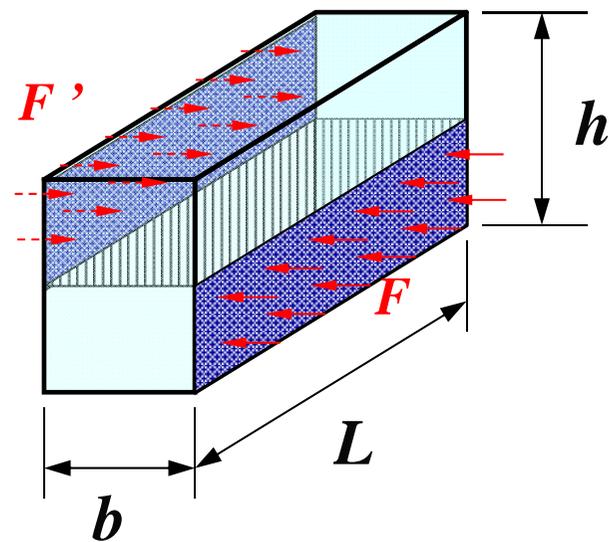
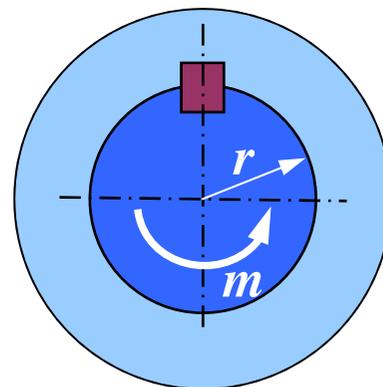
$$F_{bs} = F = \frac{m}{r}$$

挤压面面积

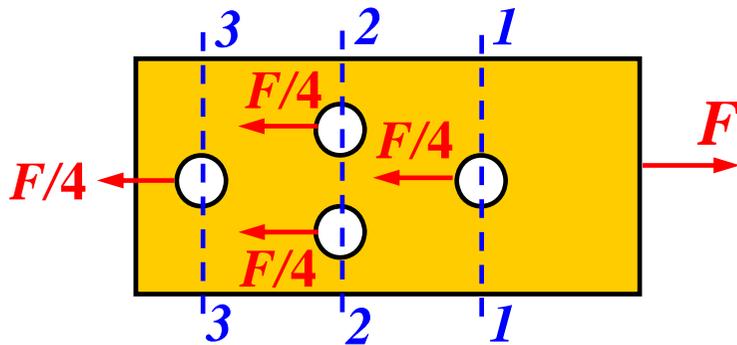
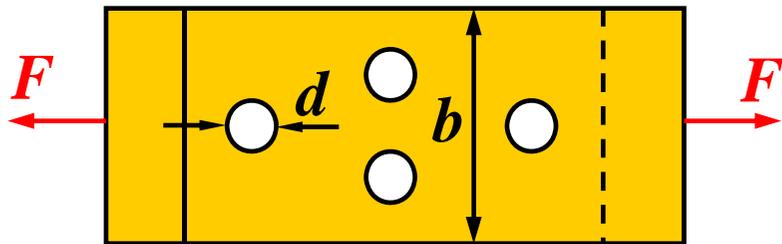
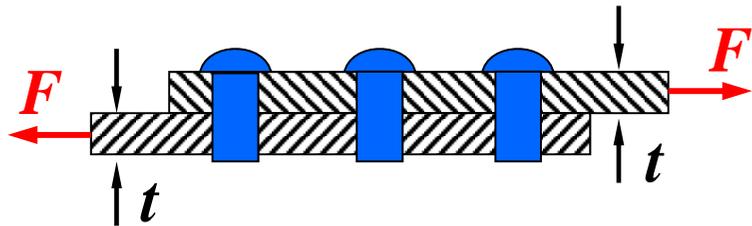
$$A_{bs} = \frac{Lh}{2}$$

挤压强度

$$\sigma_{bs} = \frac{2m}{rhL} \leq [\sigma_{bs}]$$

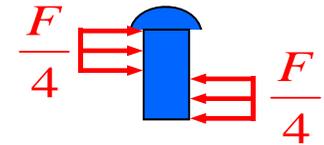


15-2 实用算法应用



例 已知: $F=80\text{kN}$, $t=10\text{mm}$, $b=80\text{mm}$, $d=16\text{mm}$, 板 $[\sigma]=160\text{MPa}$, 销钉的 $[\tau]=120\text{MPa}$, $[\sigma_{bs}]=340\text{MPa}$, 试校核联接件强度。

解: (1)销钉剪切强度校核:



$$F_s = \frac{F}{4} \quad A_j = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{F_s}{A_j} = \frac{F}{\pi d^2} = 99.5\text{MPa} \leq [\tau]$$

(2)销钉挤压强度校核: $F_{bs} = \frac{F}{4}$ $A_{bs} = dt$

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{F}{4dt} = 125\text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

(3)板的拉伸强度校核:

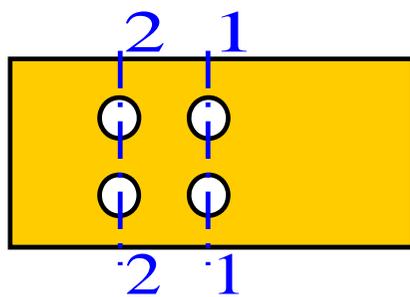
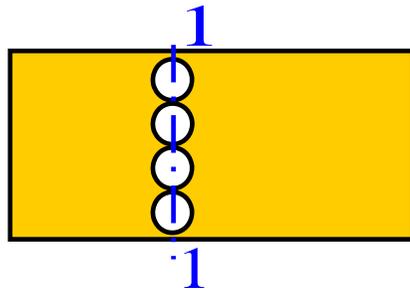
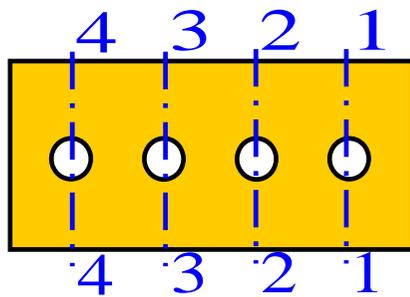
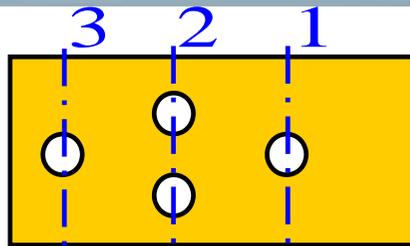
$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{F}{t(b-d)} = 125\text{MPa} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{3F}{4t(b-2d)} = 125\text{MPa} \leq [\sigma]$$

$$F_{N1} = F \quad F_{N2} = \frac{3F}{4} \quad F_{N3} = \frac{F}{4}$$

综上, 联接件安全

15-2 实用算法应用



讨论：哪种工程方案最好？

分析：四种情况的剪切、挤压强度不变

$$(一) \quad \sigma_1 = \frac{F}{t(b-d)} = 125\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{3F}{4t(b-2d)} = 125\text{MPa}$$

$$(二) \quad \sigma_1 = \frac{F}{t(b-d)} = 125\text{MPa}$$

$$(三) \quad \sigma_1 = \frac{F}{t(b-4d)} = 500\text{MPa}$$

$$(四) \quad \sigma_1 = \frac{F}{t(b-2d)} = 167\text{MPa}$$

第十五章的基本要求



1. 了解实用计算的概念;
2. 熟练掌握联接件的强度计算。