

# Mechanics of Materials

## 《材料力学》

殷民 主讲



航天航空学院--力学中心

# 第一部分 基本变形

第一章 绪论 (1)

第二章 轴向拉伸与压缩(3)

第三章 扭转(2)

附录A 截面图形的几何性质(1)

第四章 弯曲内力(2)

第五章 弯曲应力(2)

第六章 弯曲变形+电测法 (2)

阶段复习与习题课 (1)



航天航空学院--力学中心

# 第一章 绪论

- 材料力学的任务
- 变形固体的基本假设
- 内力和应力
- 位移、变形与应变
- 杆件变形的基本形式



航天航空学院--力学中心

# 1-1 材料力学的任务

- ✿ 结构物由若干个**构件**(member or component )组成;
- ✿ 构件按几何形状可分为：**杆(Bar)**、**板(Plate)**、**壳(Shell)**、**块体(Solid)**四大类;
- ✿ 构件应具有足够的**承受载荷的能力**，简称**承载能力**;



# 1-1 材料力学的任务

- ✿ 构件的承载能力包括三个方面：

**强度(Strength)** ----构件抵抗破坏的能力

**刚度(Stiffness)** ----构件抵抗变形的能力

**稳定性(Stability)** ----构件保持初始平衡形式的的能力

- ✿ 材料力学是研究杆类构件承载能力的一门科学；

- ✿ 安全：用好的材料，多用材料

经济：用次的材料，少用材料

**矛盾！**

用材料力学的  
知识来解决！

- ✿ 材料力学的主要任务：在**安全**和**经济**前提下，对构件进行材料和截面的设计。

## 1-2 变形固体的基本假设

- ✦ **变形固体(Deformable Body)**：在力的作用下，会发生变形的固体。
- ✦ 变形固体的**基本假设**：
  - 均匀假设 (**Uniformity**)
  - 连续假设 (**Continuity**)
  - 各向同性假设 (**Isotropy**)
  - 小变形假设 (**Small Deformation**)
- **变形(Deformation)**：构件受力后，形状或尺寸发生的改变
- **弹性变形(Elastic Deformation)**：卸载时能够消失或恢复的变形
- **塑性变形(Plastic Deformation)**：卸载时不能消失或恢复的变形

## 1-2 变形固体的基本假设

### 理论力学和材料力学的区别

《理论力学》 研究物体机械运动一般规律的学科

《材料力学》 研究构件承受载荷能力的学科

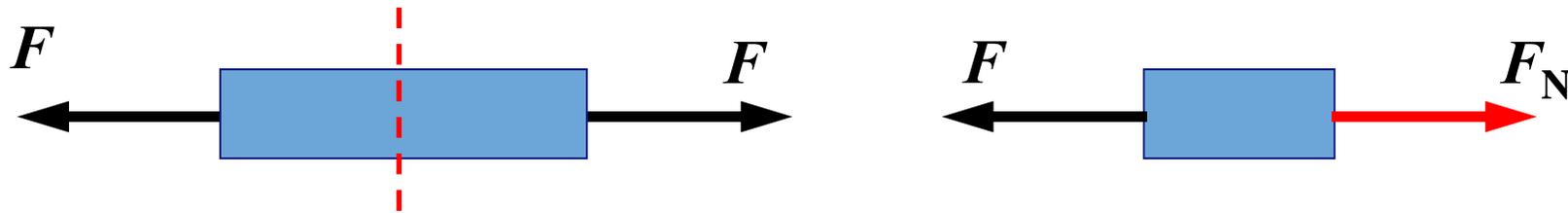
	理论力学	材料力学
学科分类:	一般力学	固体力学
研究对象:	刚体	变形体
研究内容:	力的平衡及运动规律	物体本身的变形等
力学效应:	力作用的外效应	力作用的内效应

## 1-3 内力和应力

- ✦ **外力(External Force)**: 作用在构件上的所有载荷和支座反力。
- ✦ 外力按形式可以分为: 集中力、集中力偶、分布力和分布力偶。
- ✦ 外力按性质可以分为:
  - 静载荷(Static Force)**: 载荷由零缓慢增加, 到达某值后保持不变;
  - 动载荷(Dynamic Force)**: 引起构件加速度的突加载荷或冲击载荷;
  - 交变载荷(Alternating Force)**: 随时间作周期变化的载荷。

## 1-3 内力和应力

- ✦ **内力(Internal Force)**：在外力作用下，构件内各质点的相应位置发生了变化，从而引起的各质点间相互作用力的改变量，又称“附加内力”。
- ✦ 内力随外力的增加而增加，直至构件发生破坏；
- ✦ **截面法(Method of Section)**是确定内力的一种方法；



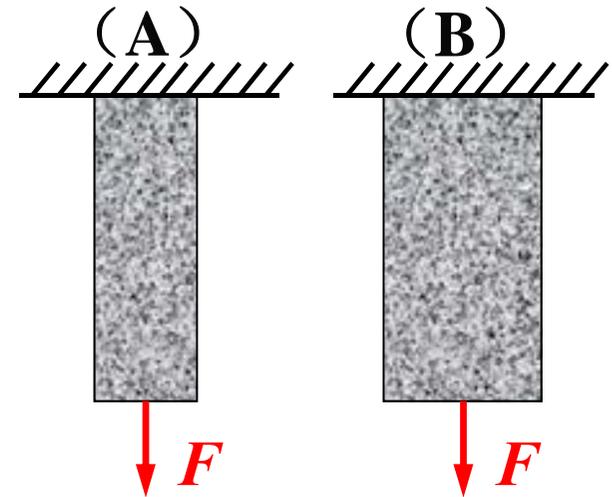
(1) 一分为二 (2) 去一留一 (3) 平衡求解

$$\sum F_x = 0 \quad F_N = F$$

- ✦ 内力在截面上是连续分布的，截面法只能确定截面上分布内力的合力（或合力偶矩）。

# 1-3 内力和应力

**问题：** *A*、*B*两根杆件，材料相同，内力是否相等？若 *F* 同时增加，哪根杆件先发生破坏？

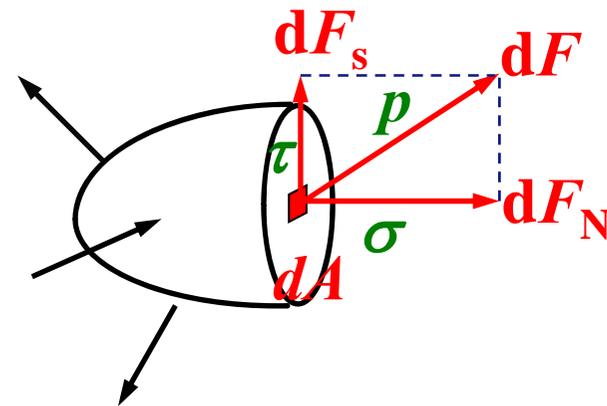


**应力(Stress):** 内力分布的集度

全应力  
(Whole Stress)  $p = dF / dA$

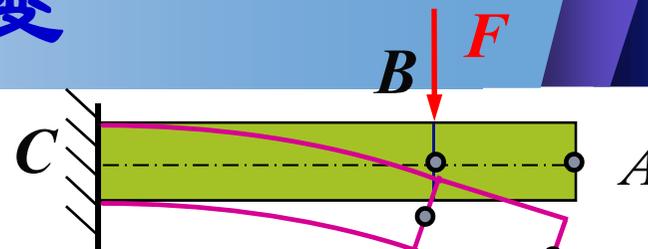
正应力  
(Normal Stress)  $\sigma = dF_N / dA$

切应力  
(Shear Stress)  $\tau = dF_s / dA$



**应力的单位：** Pa, MPa =  $10^6$ Pa, GPa =  $10^9$ Pa

# 1-4 位移、变形与应变



## 位移 (Displacement):

一点从A位置移动到B位置，AB连线称为该点的线位移；

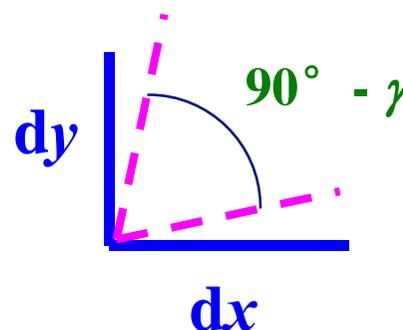
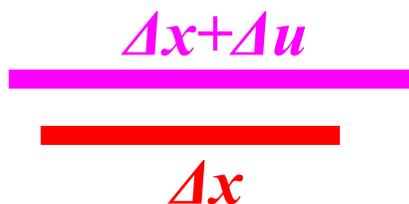
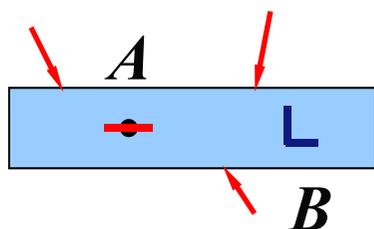
一线段发生旋转，转过的角度称为该线段的角位移；

理力研究刚体位移，材力研究变形(Deformation)位移。

## 应变(Stain):

线应变：线段相对的变形量  $\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$

切应变：角度的改变量  $\gamma$



线应变反映了构件尺寸(Size)的变化；

切应变反映了构件形状(Shape)的变化。

# 第一章的基本要求

1. 掌握构件强度、刚度和稳定性的概念，明确材料力学课程的主要任务；
2. 了解变形固体的概念及其基本假设；
3. 理解内力的概念，初步掌握利用截面法求解构件内力的方法；
4. 理解应力（正应力、切应力）和应变（线应变、切应变）的概念；
5. 初步了解杆件各基本变形的受力、变形特点。

# 第二章 轴向拉伸与压缩

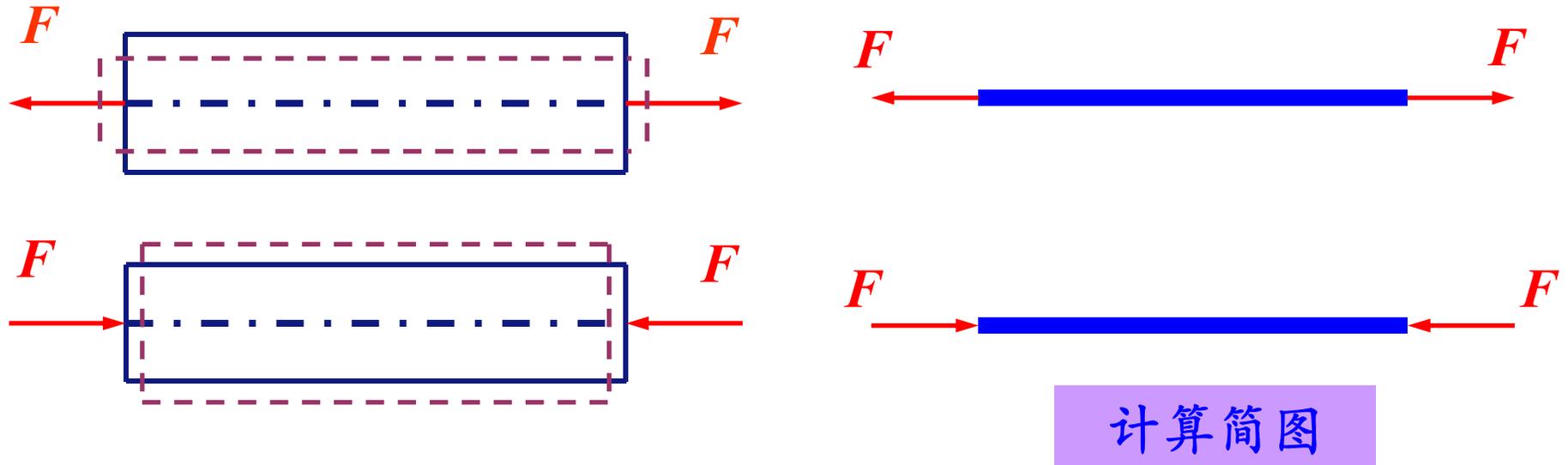
- 概述
- 轴向拉压的内力、应力与强度理论
- 轴向拉压的变形
- 材料拉压的力学性质
- 拉压超静定问题
- 圣文南原理、应力集中、安全因数



航天航空学院--力学中心

## 2-1 概述

### 力学模型



**受力特点:** 外力的合力与杆的轴线重合。

**变形特点:** 沿轴线伸长或缩短。

具有上述受力和变形特点的杆件称为拉(压)杆; 拉(压)杆的变形称为轴向拉伸或压缩 (Tension or Compression)。

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

### 一、直杆横截面上的内力

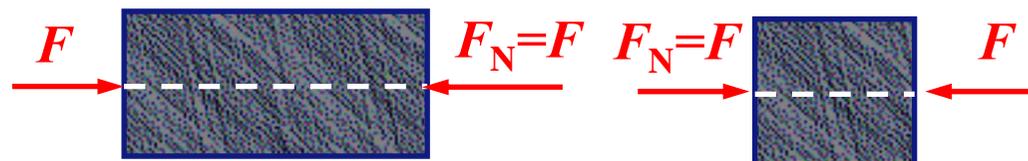
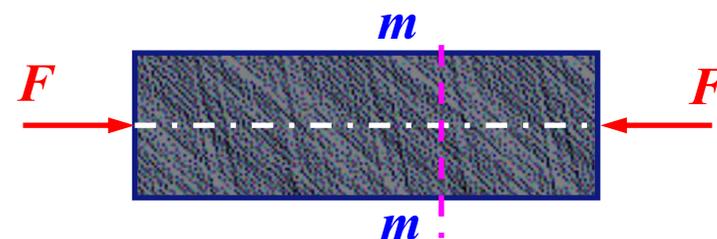
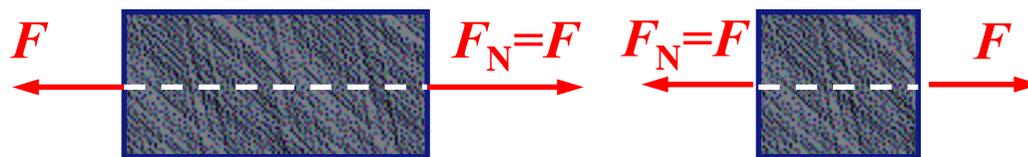
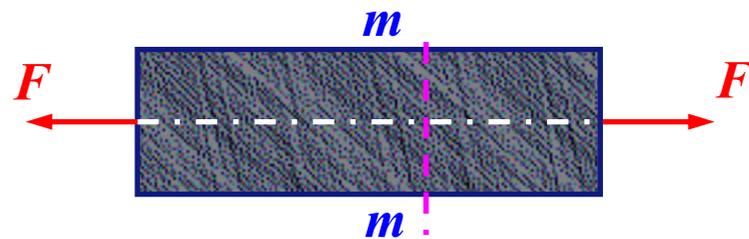
轴力 (Axial Force):  $F_N$

轴力的符号规则:

$F_N$  与截面外法线方向  
一致为正, 相反为负

注意: 轴力的符号是通过截面的方向定义的, 而与坐标方向无关, 这样可以确保同一截面上的轴力符号一致!

轴力为正, 直杆受拉;  
轴力为负, 直杆受压。



## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

**例** 求图示等截面直杆的内力  
(单位: kN)。

**解:** 分三段求解轴力

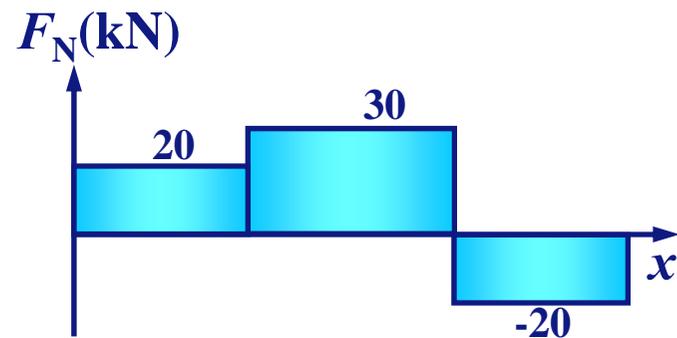
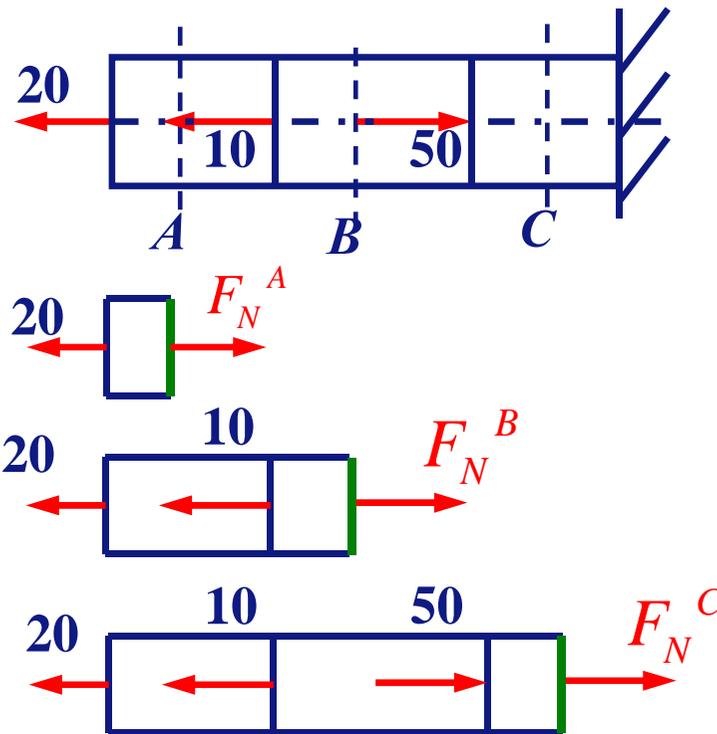
$$F_N^A - 20 = 0 \quad F_N^A = 20$$

$$F_N^B - 20 - 10 = 0 \quad F_N^B = 30$$

$$F_N^C + 50 - 20 - 10 = 0 \quad F_N^C = -20$$

**讨论:**

由于A、B、C三个截面上的轴力未知, 所以先假设其为正值, 最后求出来若为正, 说明假设正确, 其值就是为正。此方法称为**设正法**。

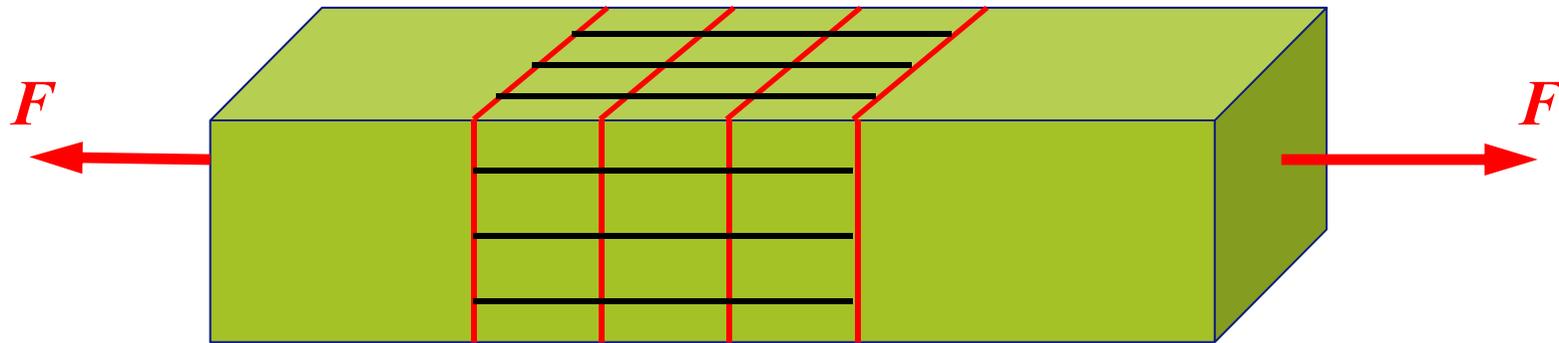


轴力图

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

### 二、直杆横截面上的应力

方法一：实验 变形  $\longrightarrow$  应变  $\longrightarrow$  胡克定律  $\longrightarrow$  应力

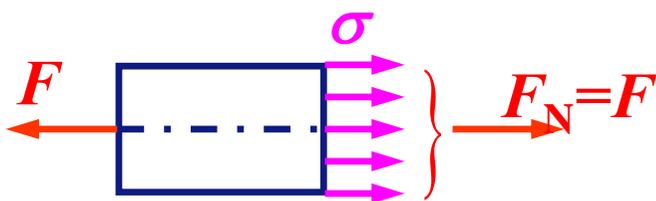


**现象：** 纵线仍平行于轴线，且各线段均匀伸长；  
横线仍为直线，且垂直于轴线和纵线。

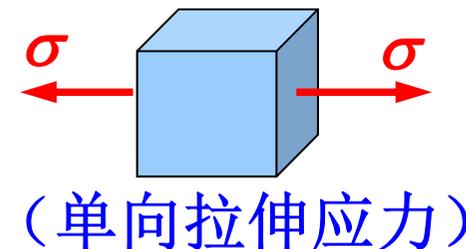
**假设：** 变形前横截面内各点，变形后仍在同一平面内。

由实验和假设可以得出，在横截面内各点沿轴线方向的变形是均匀的，因此沿轴线方向的线应变是均匀的，应力也是均匀的。

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论



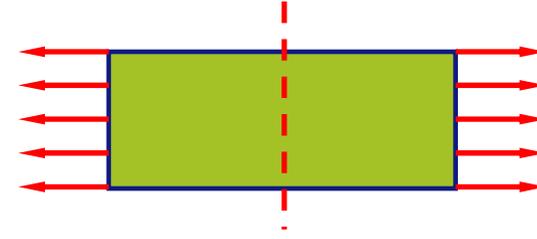
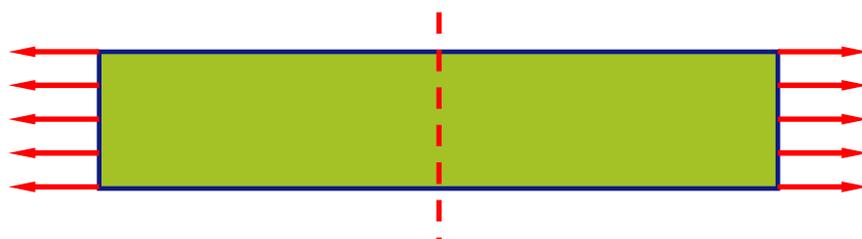
$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$



$F_N > 0, \sigma > 0$  拉应力

$F_N < 0, \sigma < 0$  压应力

方法二



如此继续分割下去，即可得到平截面假设，则应力均匀！

**圣文南原理(Saint-Venant's Principle):** 在静力等效的条件下，不同的加载方式只对加载处附近区域的应力分布有影响，而在离加载处较远的区域，其应力分布没有显著的差别。

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

### 三、拉压强度理论

- 使材料发生破坏的最小应力称为极限应力，用 $\sigma^0$ 表示。
- 为使构件能够正常工作，其工作应力应小于材料的极限应力

强度条件  
(Strength Condition)

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \leq \frac{\sigma_0^0}{n} = [\sigma]$$

$n$ : 安全因数  
(factor of safety)

$[\sigma]$ : 许用应力  
(allowable stress)

#### ● 强度条件的应用

- (1) 校核强度: 已知 $F_N$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$ ;
- (2) 设计截面: 已知 $F_N$ ,  $[\sigma]$ ;
- (3) 确定许可载荷: 已知 $A$ ,  $[\sigma]$ 。

#### ● 公式适用范围

- (1) 精确适用等直杆
- (2) 推广适用变截面杆 
- (3) 推广适用微曲杆

  $R \geq 10d$

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

**例** 电机重量  $W=1.2\text{ kN}$ ，M8吊环螺栓外径  $D=8\text{mm}$ ，内径  $d=6.4\text{mm}$ ， $[\sigma]=40\text{MPa}$ ，校核螺栓强度。

**解：**

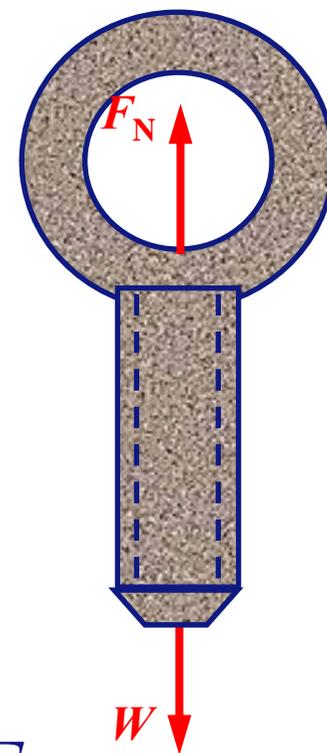
$$F_N = W = 1.2\text{ kN} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$
$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{4W}{\pi d^2}$$
$$= \frac{4 \times 1.2 \times 10^3}{3.14 \times 6.4^2} = 37.3\text{MPa} < [\sigma]$$

**结论：** 螺栓强度安全!

(这个不能少!)

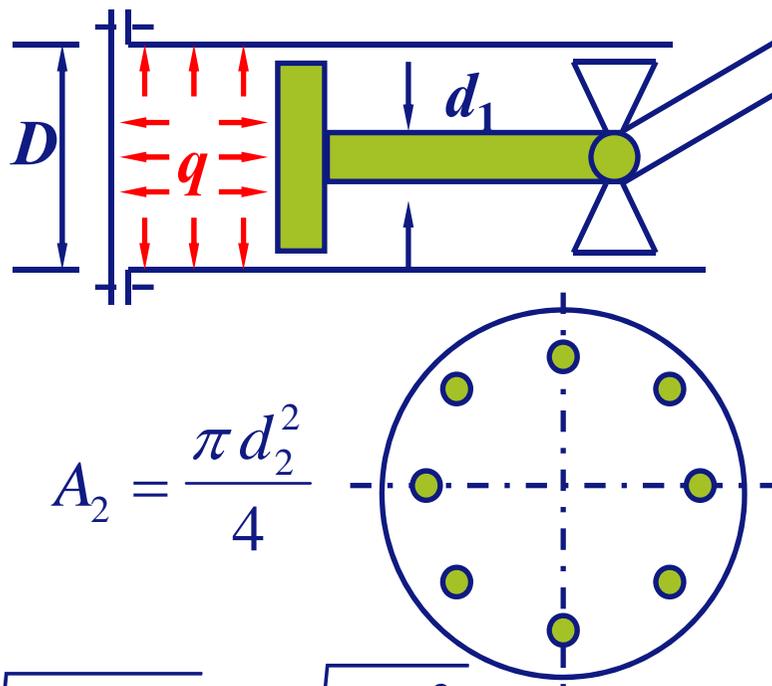
**讨论：**

$$A^* = \frac{F_N}{[\sigma]} < A \quad F^* = A[\sigma] > F_N$$



## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

**例** 压缩机汽缸直径  $D=400\text{mm}$ ，气压  $q=1.2\text{ MPa}$ ，活塞杆  $[\sigma]_1=50\text{MPa}$ ，缸盖用 M20 螺栓 ( $d_2=18\text{ mm}$ ) 与汽缸联接，螺栓  $[\sigma]_2=40\text{ MPa}$ 。求：活塞杆直径  $d_1$  和螺栓个数  $n$ 。



**解：**  $F = qA = q \frac{\pi D^2}{4} = F_N$      $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$      $A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$

$$|\sigma_1| = \frac{F_N}{A_1} \leq [\sigma]_1 \quad (\text{压应力})$$

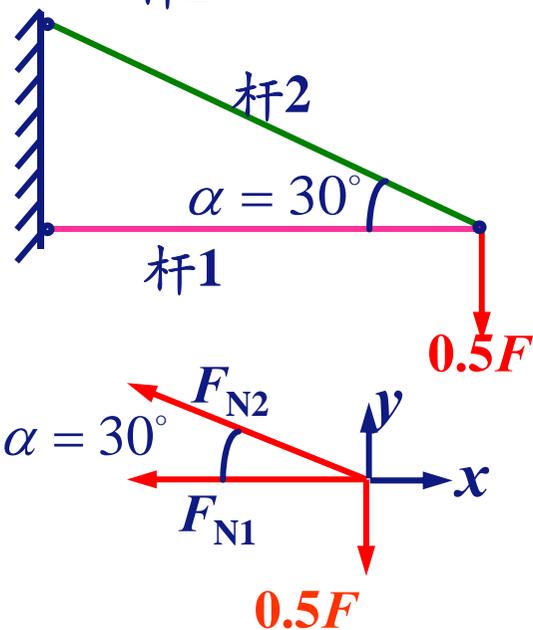
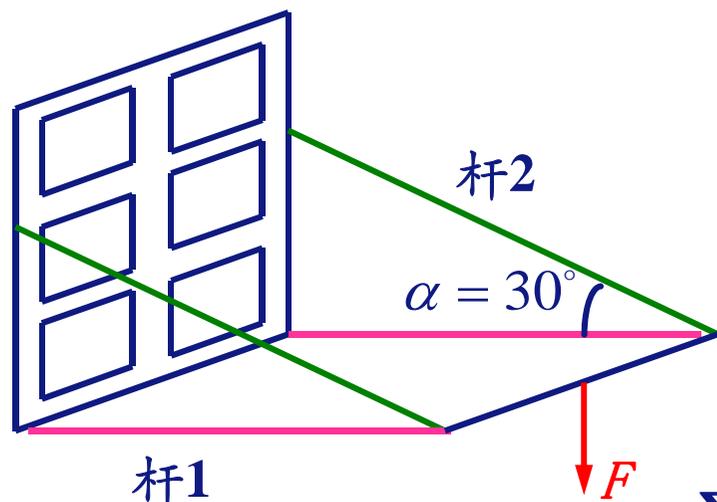
$$\sigma_2 = \frac{F_N}{nA_2} \leq [\sigma]_2 \quad (\text{拉应力})$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F_N}{\pi [\sigma]_1}} = \sqrt{\frac{qD^2}{[\sigma]_1}} = 62\text{mm}$$

$$n \geq \frac{F_N}{A_2 [\sigma]_2} = \frac{qD^2}{d_2^2 [\sigma]_2} = 14.8$$

考虑加工方便应取  $n=16$ 。

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论



**例**  $A_1 = 1200\text{mm}^2, [\sigma]_1 = 7\text{MPa},$   
 $A_2 = 7\text{mm}^2, [\sigma]_2 = 160\text{MPa},$   
 求许可吊重  $F$ 。

**解:** 1) 建立计算的力学模型

2) 求内力 (轴力)

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{N1} - F_{N2} \cos \alpha = 0 \quad F_{N1} = -\frac{\sqrt{3}F}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N2} \sin \alpha - 0.5F = 0 \quad F_{N2} = F$$

3) 按强度条件确定许可吊重  $F$

$$|\sigma_1| = \frac{|F_{N1}|}{A_1} \leq [\sigma]_1, \quad [F]_1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} A_1 [\sigma]_1 = 9.7\text{kN}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} \leq [\sigma]_2, \quad [F]_2 \leq A_2 [\sigma]_2 = 1.12\text{kN}$$

$$[F] = 1.12\text{kN}$$

## 2-2 轴向拉压的内力、应力与强度理论

### 四、拉压直杆斜截面上的应力

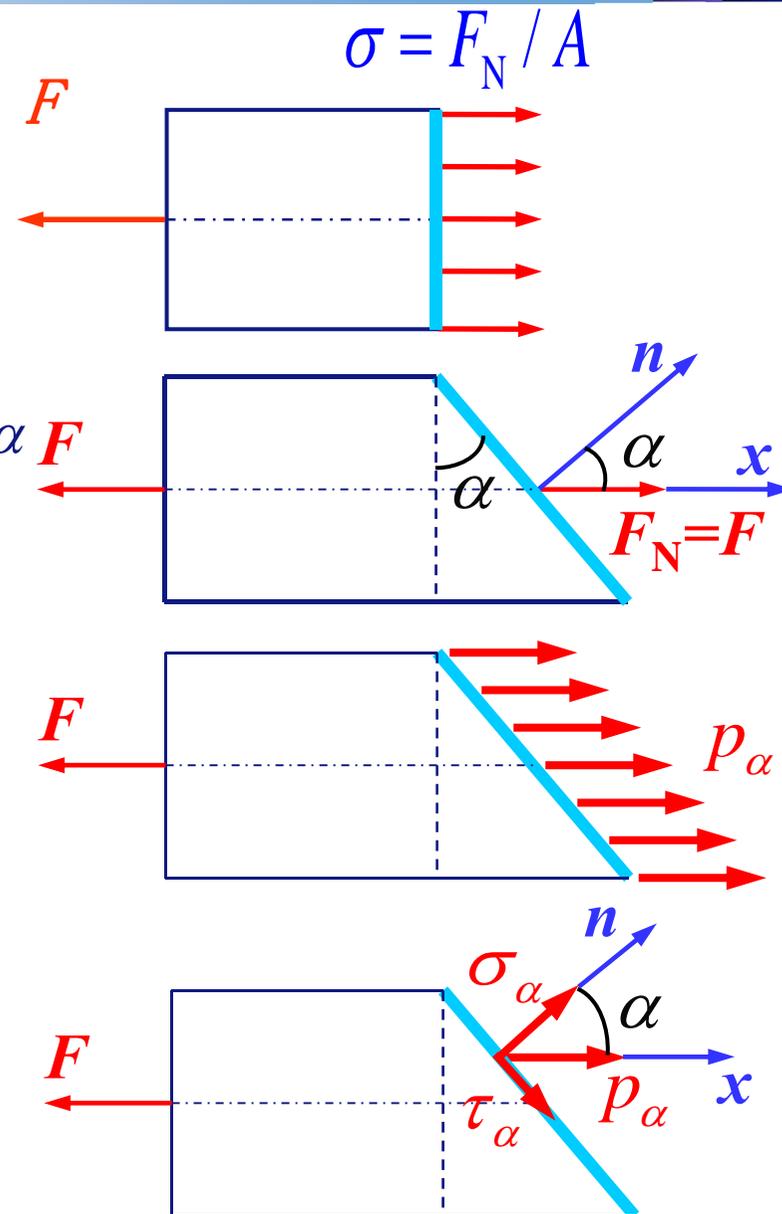
$\alpha$ 角符号：从  $x$  逆时针转到  $\alpha$  截面的外法线  $n$  时， $\alpha$  为正值，反之为负。

$$p_\alpha = \frac{F_N}{A_\alpha} \quad A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \quad p_\alpha = \frac{F_N}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

切应力的符号规定：截面外法线顺时针转90度后，其方向与切应力方向相同为正，相反为负。



## 2-3 轴向拉压的变形

### 一、纵向变形:

$$\Delta l = l_1 - l$$

$\Delta l > 0$  拉伸

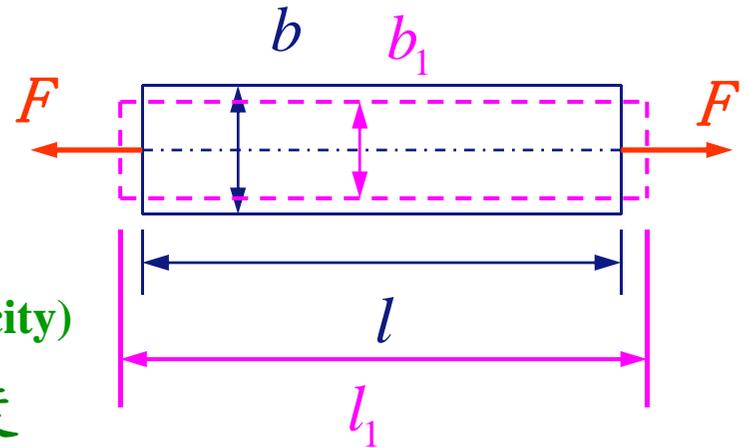
$\Delta l < 0$  压缩

$$\Delta l \propto \frac{F_N l}{A}$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

$E$ : 弹性模量  
(Modulus of elasticity)

$EA$ : 抗拉刚度



纵向应变  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F_N}{EA} = \frac{\sigma}{E}$

$$\sigma = \varepsilon E$$

胡克定律  
(Hooke's Law)

### 二、横向变形:

$$\Delta b = b_1 - b$$

当  $\Delta l > 0$  时,  $\Delta b < 0$

横向应变  $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$

当  $\varepsilon > 0$  时  $\varepsilon' < 0$

泊松比 (横向变形系数)  
Poisson's ratio

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

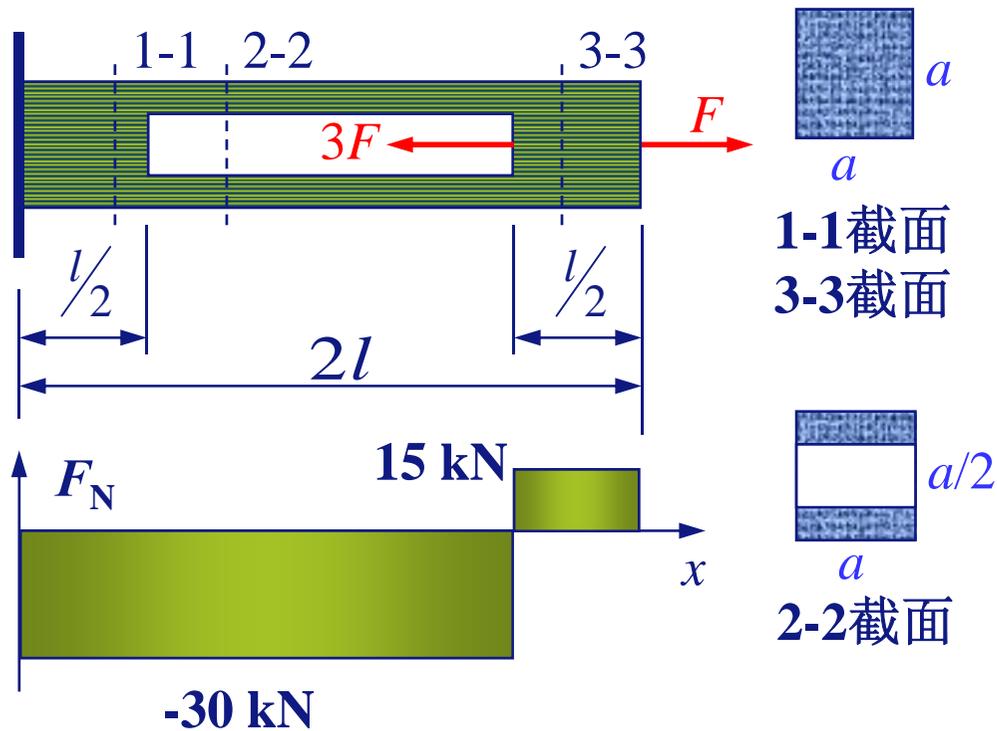
$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon$$

### 三、刚度条件:

$$\Delta l \leq [\Delta l]$$

(不重要、不出现)

## 2-3 轴向拉压的变形



例  $F=15\text{kN}$ ,  $l=1\text{m}$ ,  
 $a=20\text{mm}$ ,  $E=200\text{GPa}$   
 求:  $\Delta l$

解:

1) 求内力并作轴力图

$$F_{N3} = F = 15\text{kN}$$

$$F_{N1} = F_{N2} = -2F = -30\text{kN}$$

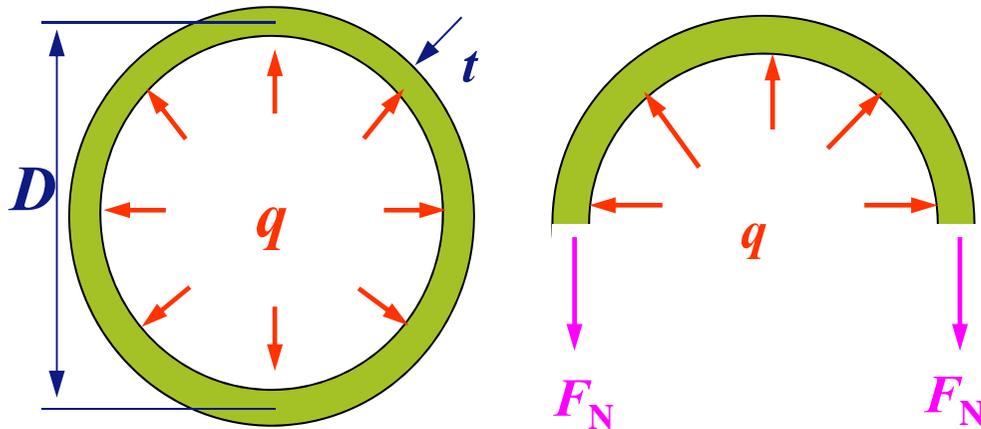
2) 杆的变形

$$A_1 = A_3 = a^2 = 400\text{mm}^2, A_2 = 200\text{mm}^2 \quad l_1 = l_3 = 0.5\text{m}, l_2 = 1\text{m}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{F_{N1}l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2}l_2}{EA_2} + \frac{F_{N3}l_3}{EA_3} = \dots\dots$$

$$= -0.1875 - 0.75 + 0.094 = -0.844\text{mm}$$

## 2-3 轴向拉压的变形



**例** 薄壁圆环直径为 $D$ ，厚度为 $t$ ，圆环内受均匀内压 $q$ ，圆环材料的弹性模量为 $E$ 。求薄壁圆环的应力与变形。

**解：** 平衡条件

$$\sigma = \frac{F_N}{t} = \frac{qD}{2t} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{qD}{2Et}$$

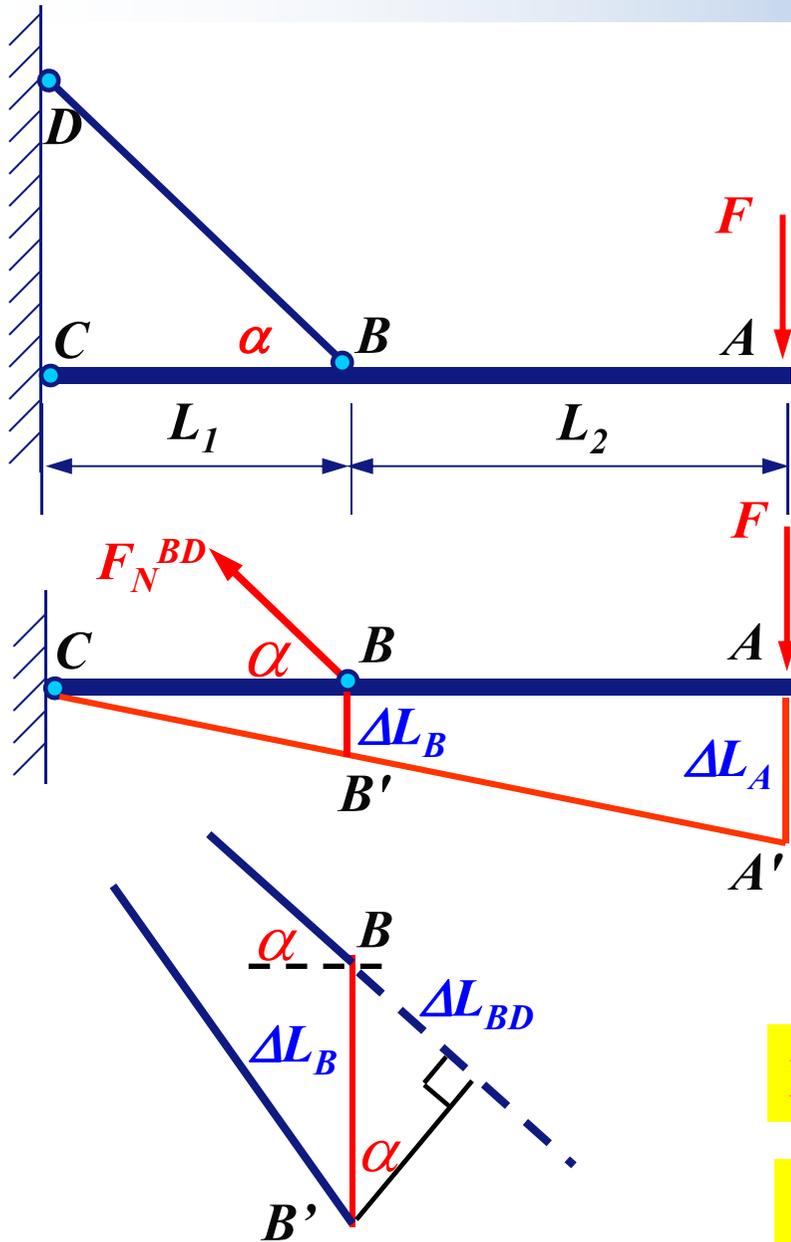
$$2F_N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{qD \cos \theta}{2} d\theta$$

周长的改变:  $\Delta s = \varepsilon s = \frac{qDs}{2Et} = \frac{q\pi D^2}{2Et}$

$$F_N = \frac{qD}{2}$$

直径的改变:  $\Delta D = \frac{\Delta s}{\pi} = \frac{q D^2}{2Et}$

## 2-3 轴向拉压的变形



**例**  $AC$  杆为刚性,  $BD$  杆横截面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ 。求  $A$  点的竖直位移。

**解:** 求内力  $\sum m(C) = 0$

$$F_N^{BD} \sin \alpha \times L_1 - F(L_1 + L_2) = 0$$

$$F_N^{BD} = \frac{F(L_1 + L_2)}{\sin \alpha \times L_1} \quad \Delta L_{BD} = \frac{F_N^{BD} L_1}{EA \cos \alpha}$$

$$\Delta L_B = \frac{\Delta L_{BD}}{\sin \alpha} \quad \Delta L_A = \frac{\Delta L_B (L_1 + L_2)}{L_1}$$

1、切线代替圆弧, 得到新位置;

2、向原杆做垂线, 得到伸长量。

## 2-5 拉压超静定问题

**静定结构(Statically determinate structure):** 所有的未知力均能由静力平衡方程确定的结构。

**超静定结构或静不定结构(Statically indeterminate structure):** 仅仅用平衡方程不能求得所有未知力的结构。

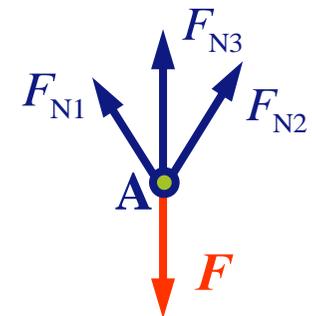
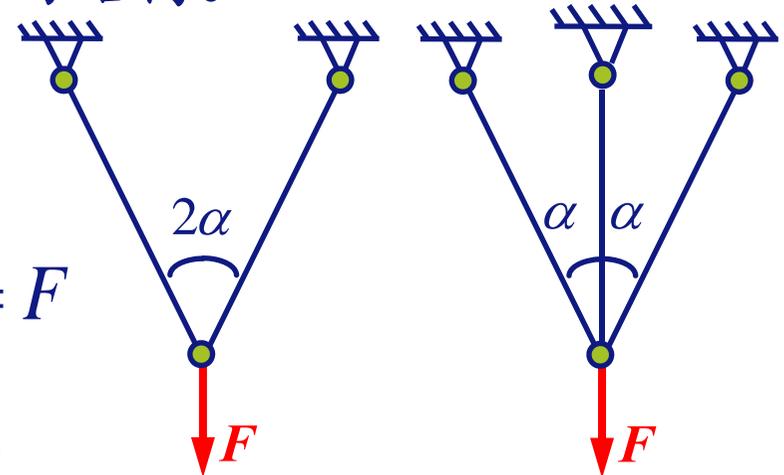
$$\sum F_x = 0: F_{N1} = F_{N2}$$

$$\sum F_y = 0: (F_{N1} + F_{N2}) \cos \alpha + F_{N3} = F$$

**多余约束:** 维持平衡所不需要的约束。

**超静定次数:** 未知力数目与独立平衡方程数的差。

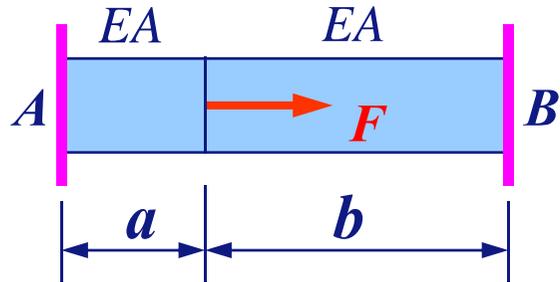
多余约束的求解需要补充方程才能确定, 补充方程往往是**几何方程(变形协调方程)**。



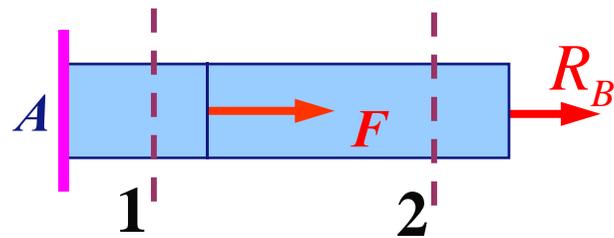
## 2-5 拉压超静定问题

例 求两端固定直杆的约束反力。

解：解除右端约束，以约束反力代替

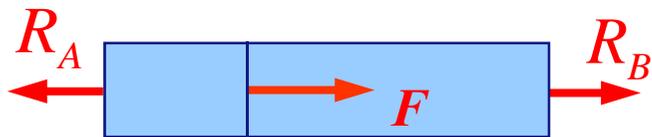


平衡方程：  $F_{N1} = F + R_B$ ,  $F_{N2} = R_B$



几何方程：  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$

物理方程：  $\Delta l_1 = \frac{F_{N1} a}{EA}$ ,  $\Delta l_2 = \frac{F_{N2} b}{EA}$



补充方程：  $\frac{(F + R_B)a}{EA} + \frac{R_B b}{EA} = 0$

$$\text{解得： } R_B = -\frac{Fa}{a+b} \quad R_A = \frac{Fb}{a+b}$$

## 2-5 拉压超静定问题

例 1、2两根直杆的抗拉刚度分别为  $E_1A_1$  和  $E_2A_2$ ，求两杆的内力。

解：

- 1、判别：为一次超静定
- 2、假设变形状态，确定内力方向

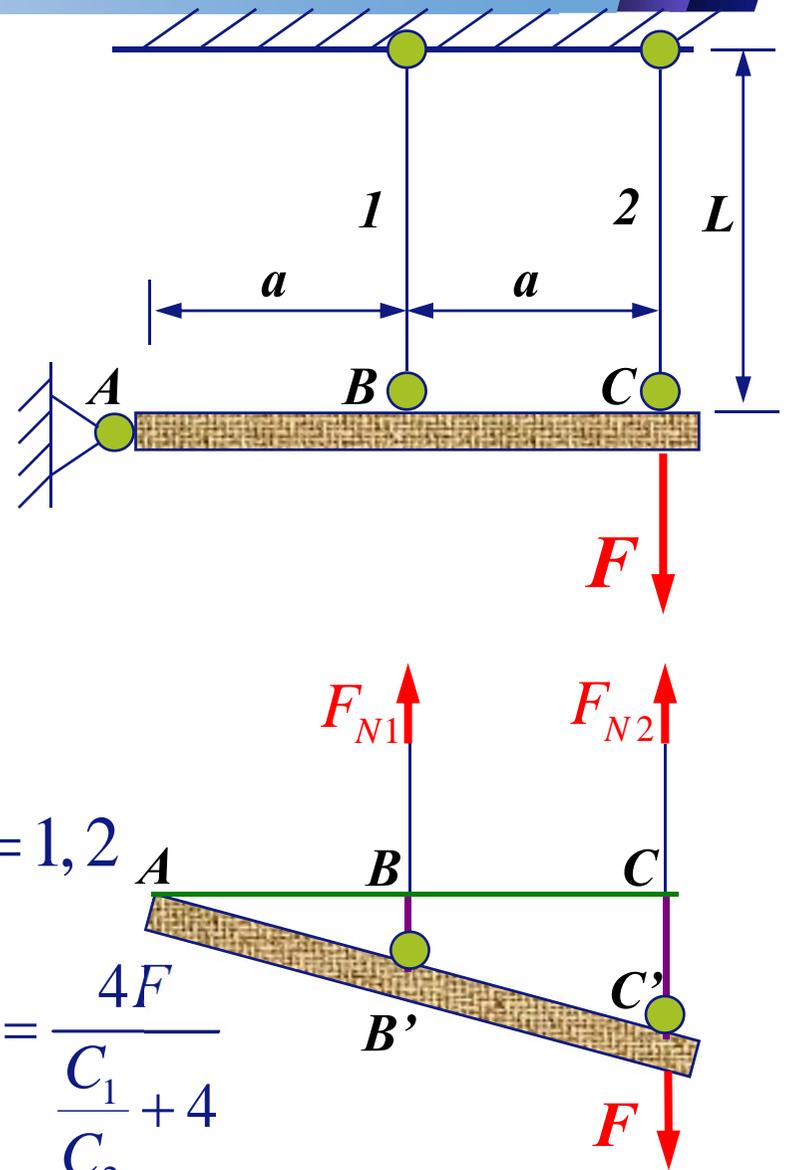
3、平衡方程：  $2F_{N2} + F_{N1} = 2F$

4、几何方程：  $\Delta L_2 = 2\Delta L_1$

5、物理方程：  $\Delta L_i = \frac{F_{Ni}L}{E_iA_i} = \frac{F_{Ni}}{C_i} \quad i = 1, 2$

6、联立求解得：  $F_{N1} = \frac{2F}{4\frac{C_2}{C_1} + 1}$

$F_{N2} = \frac{4F}{\frac{C_1}{C_2} + 4}$



## 2-5 拉压超静定问题

### 讨论：超静定结构的特点

- 1、求解内力需结合平衡方程、几何方程和物理方程；
- 2、内力与刚度有关，刚度越大，内力越大；

$$F_{N1} = \frac{2F}{4\frac{C_2}{C_1} + 1} \quad F_{N2} = \frac{4F}{\frac{C_1}{C_2} + 4} \quad C_i = \frac{E_i A_i}{L}$$

- 3、变形状态可以任意假设，内力方向由变形状态来确定，若内力求出为正，则表明假设与实际一致（可用设正法）；
- 4、装配误差、温度变化会使超静定结构产生内力和应力。

## 2-5 拉压超静定问题

例 1、2两根直杆的抗拉刚度分别为 $E_1A_1$ 和 $E_2A_2$ ，2杆短 $\Delta$ ，求装配后两杆的内力。

解：1、判别：为一次超静定

2、假设变形状态，确定内力方向

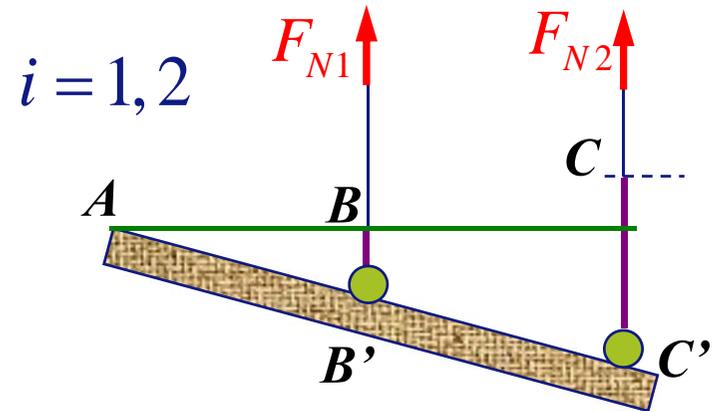
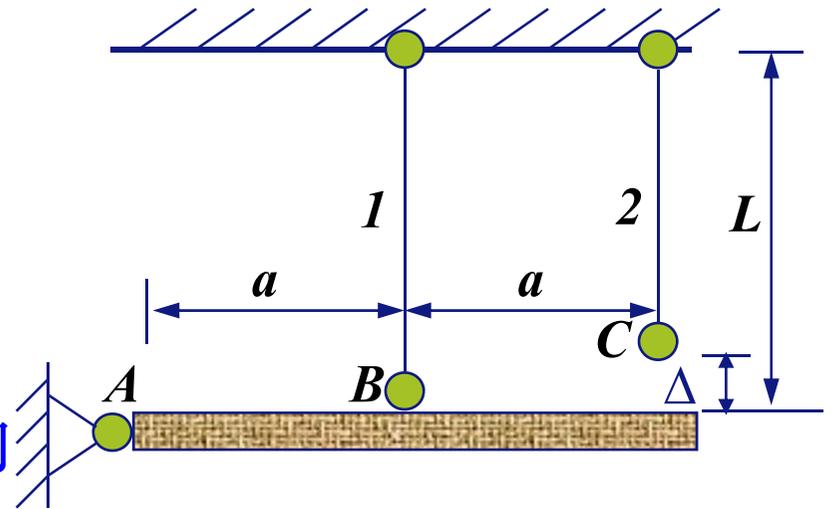
3、平衡方程： $2F_{N2} + F_{N1} = 0$

4、几何方程： $\Delta L_2 - \Delta = 2\Delta L_1$

5、物理方程： $\Delta L_i = \frac{F_{Ni}L}{E_iA_i} = \frac{F_{Ni}}{C_i}$

6、联立求解得：

$$F_{N1} = -\frac{2C_2\Delta}{4\frac{C_2}{C_1} + 1} \quad F_{N2} = \frac{C_1\Delta}{\frac{C_1}{C_2} + 4}$$



## 2-5 拉压超静定问题

例 1、2两杆的抗拉刚度均为 $EA$ ，热膨胀系数为 $\alpha$ ，求温升 $T$ 度后两杆的内力。

解：1、判别：为一次超静定

2、假设变形状态，确定内力方向

3、平衡方程： $2F_{N2} + F_{N1} = 0$

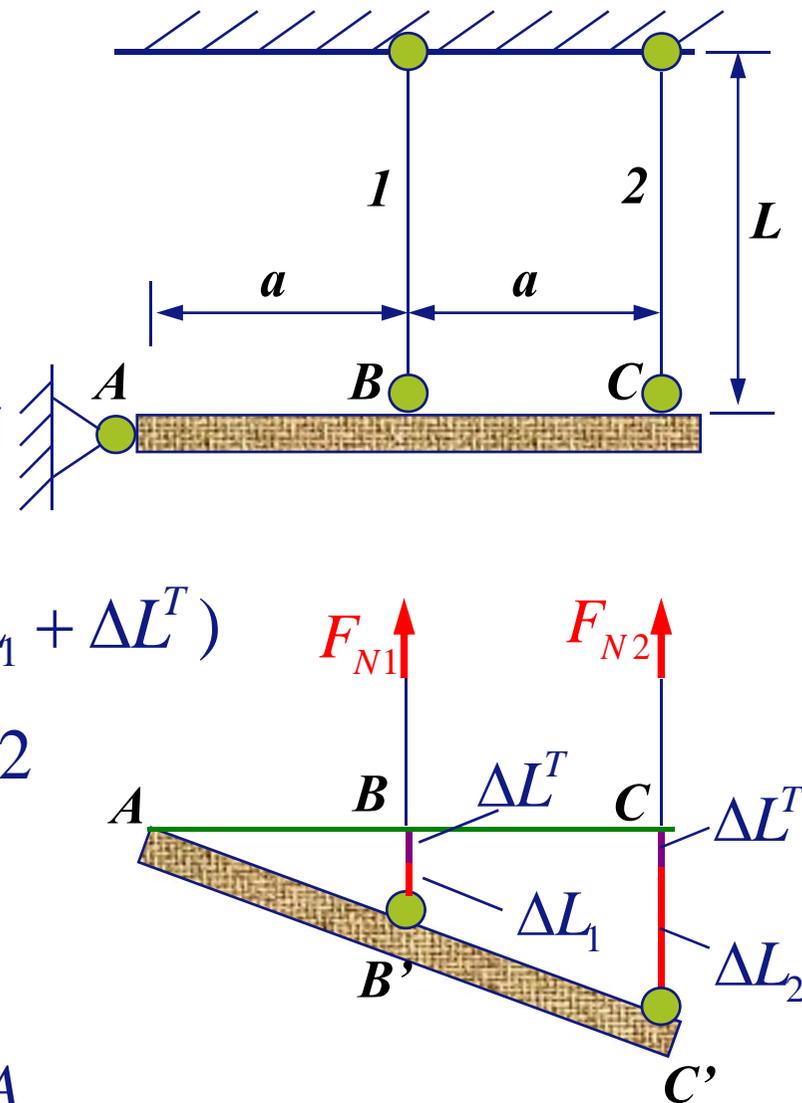
4、几何方程： $\Delta L_2 + \Delta L^T = 2(\Delta L_1 + \Delta L^T)$

5、物理方程： $\Delta L_i = \frac{F_{Ni}L}{EA} \quad i = 1, 2$

$$\Delta L^T = \alpha TL$$

6、联立求解得：

$$F_{N1} = -\frac{2}{5}\alpha TEA \quad F_{N2} = \frac{1}{5}\alpha TEA$$



# 基本解题思路

## 静定结构:

外力  $\xrightarrow{\text{截面法}}$  内力 (轴力  $F_N$ )  $\longrightarrow$

应力  $\sigma = \frac{F_N}{A}$   $\longrightarrow$  强度条件  $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$

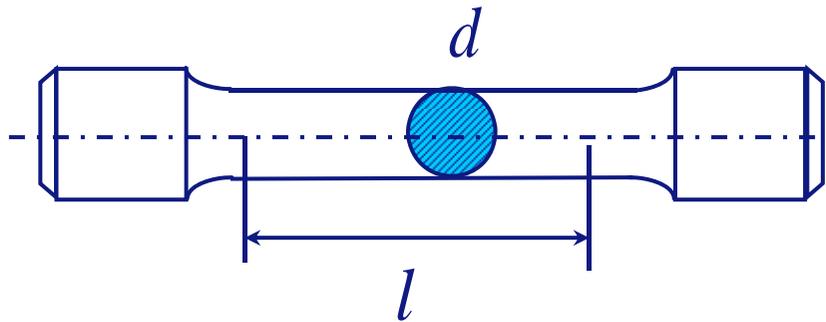
变形  $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$   $\longrightarrow$  刚度条件

## 超静定结构:

平衡方程、几何方程、物理方程  $\longrightarrow$  内力

## 2-4 材料拉压的力学性质

- 材料在外力作用下表现出来的与变形和破坏有关的性质，称为材料的**力学性质**，又称**机械性质**。
- 通过实验的方法，按照有关**国家标准**，来测定材料的力学性质。
- 标准拉伸圆截面试件：



5倍试样： $l = 5d$

10倍试样： $l = 10d$

- **低碳钢(mild steel)**和**灰铸铁(gray cast iron)**的力学性质比较典型。

## 2-4 材料拉压的力学性质

### 一、低碳钢的拉伸性能

#### ■ 弹性阶段(Elastic region): $ob$

比例极限(Proportional limit)  $\sigma_p$

弹性极限(Elastic limit)  $\sigma_e$

弹性模量(Modulus of elasticity)

$$E = \sigma / \varepsilon = \tan \alpha$$

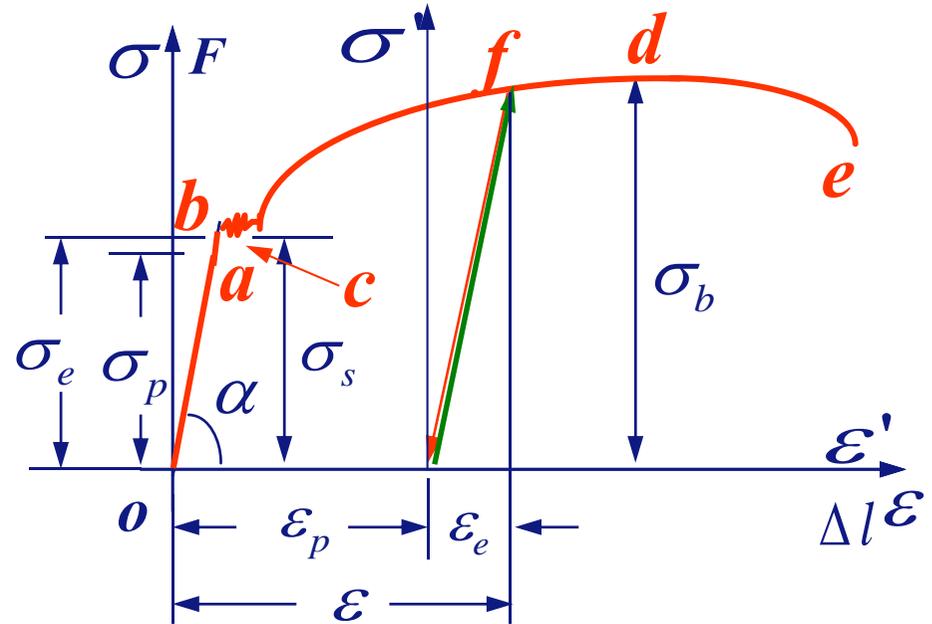
#### ■ 屈服阶段(Yielding region): $bc$

屈服极限(Yielding limit)  $\sigma_s$

#### ■ 强化阶段(Hardening region): $cd$

强度极限(Ultimate limit)  $\sigma_b$

#### ■ 颈缩阶段(Necking region): $de$



**冷作硬化:** 比例极限提高, 屈服消失, 塑性降低, 残余变形减小。

## 2-4 材料拉压的力学性质

### □ 延伸率(Percent elongation)

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

### □ 断面收缩率(Percent reduction of area)

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

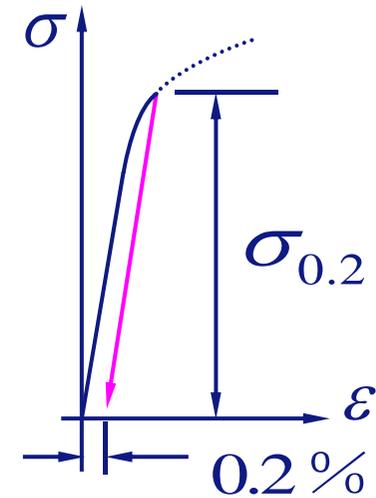
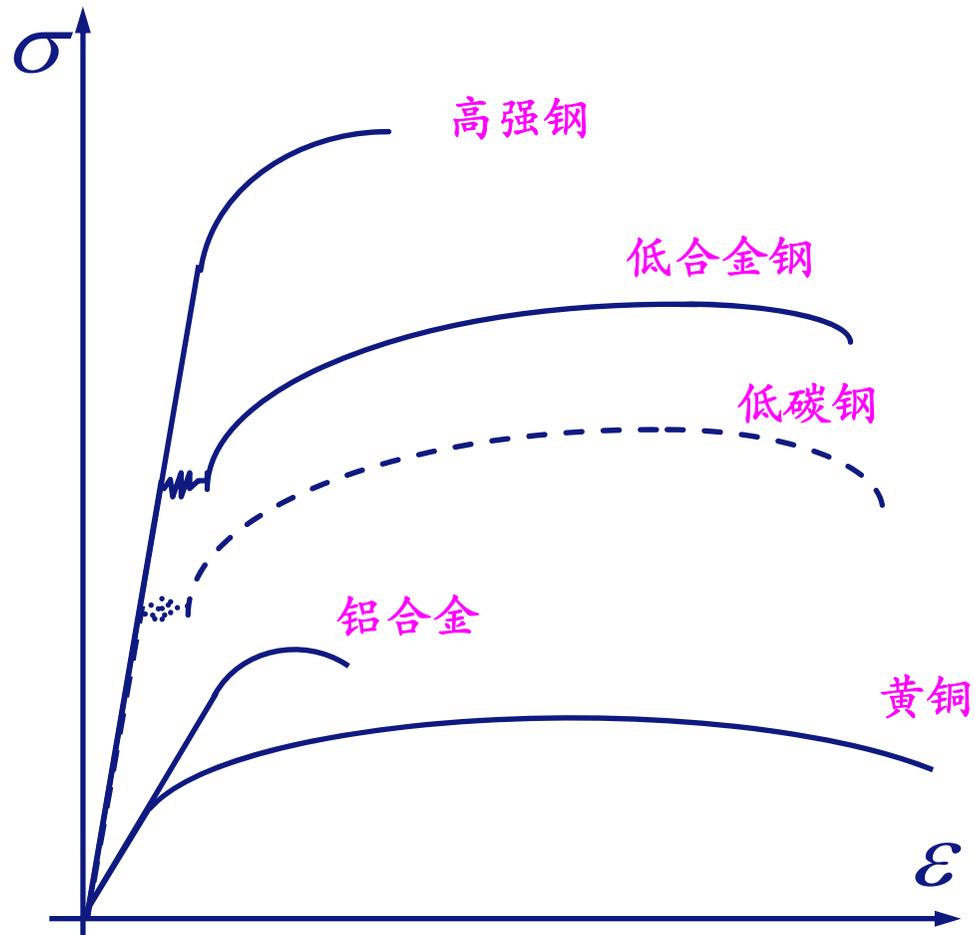
$\delta > 5\%$     塑性材料     $\delta < 5\%$     脆性材料  
(Ductile Materials)    (Brittle Materials)

### □ 强度指标：屈服极限、强度极限

### □ 塑性指标：延伸率、断面收缩率

## 2-4 材料拉压的力学性质

### 二、其它塑性材料的拉伸性质



名义屈服极限:  $\sigma_{0.2}$

## 2-4 材料拉压的力学性质

### 三、脆性材料的拉伸性质

● 脆性材料有灰铸铁、水泥、石料、砖、玻璃、陶瓷、粉笔等。

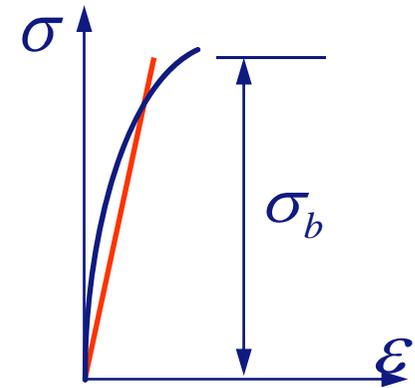
● 灰铸铁应力-应变曲线如图所示。

特点：

没有直线段，没有屈服阶段，只有强度极限  $\sigma_b$

变形小，弹性模量  $E$  采用割线弹性模量。

● 灰铸铁材料特点：抗拉强度低，不宜制成受拉构件



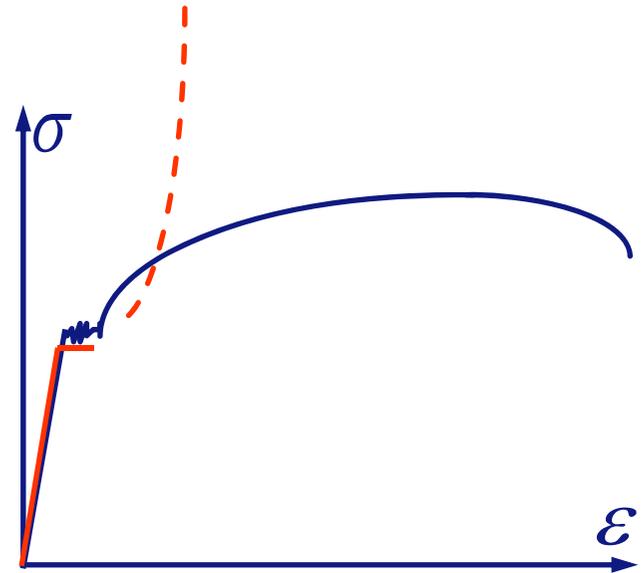
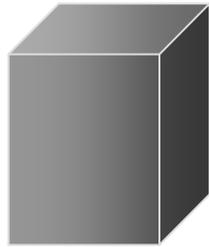
## 2-4 材料拉压的力学性质

### 四、压缩试件

金属材料



非金属材料



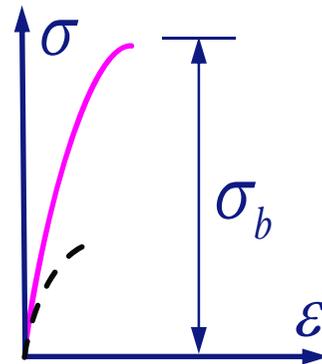
### 五、低碳钢的压缩试验

$$\sigma_P^- = \sigma_P^+, \sigma_e^- = \sigma_e^+, \sigma_s^- = \sigma_s^+, E^- = E^+$$

### 六、灰铸铁的压缩试验

没有直线段，没有屈服阶段，

只有强度极限  $\sigma_b^- = (3 \sim 5)\sigma_b^+$



破坏发生在与轴线成 $55^\circ$ 的斜面上，与最大切应力有关。

铸铁的特点：抗压性能好；易浇铸；价格低廉。

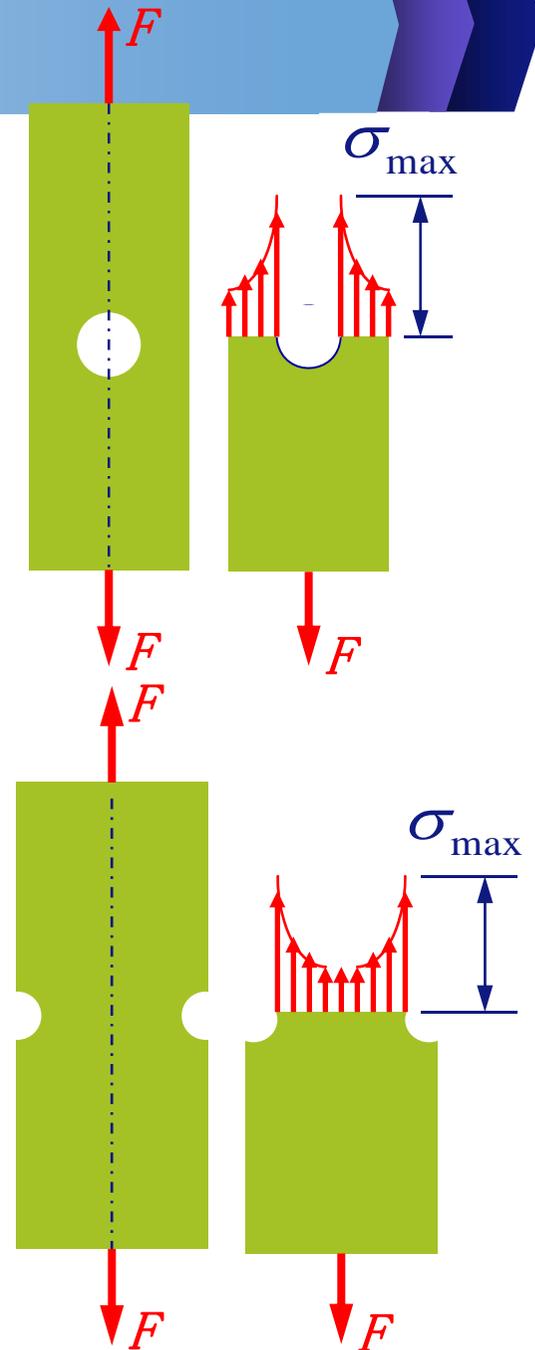
## 2-6 应力集中与安全因数

● 由于构件形状和尺寸变化而引起局部应力急剧增大的现象，称为**应力集中(Stress Concentration)**。

● 理论应力集中系数：

$$\alpha = \sigma_{\max} / \sigma_0$$

● 构件的截面尺寸改变得越急剧，应力集中的程度就越严重。



## 2-6 应力集中与安全因数

$$[\sigma] = \sigma^0 / n \quad \sigma^0: \text{危险应力}; n: \text{安全因数}$$

- **塑性材料**: 当应力达到屈服极限时, 将产生显著的塑性变形, 从而导致构件失效, 故

$$\sigma^0 = \sigma_s \quad (\sigma^0 = \sigma_{0.2})$$

- **脆性材料**: 当应力达到强度极限时, 将发生破坏, 故

$$\sigma^0 = \sigma_b$$

- 为何要引入安全因数?

1、误差和不确定因数

2、必要的强度储备

- 安全因数的选取, 应考虑:

1、材质均匀性; 2、载荷准确性; 3、计算精确性;  
4、构件重要性; 5、使用时间性;

## 第二章的基本要求

1. 掌握轴向拉伸与压缩时轴力的计算以及轴力图的画法；
2. 了解轴向拉伸与压缩时正应力计算公式的推导过程，掌握横截面和斜截面上应力的计算；
3. 熟练掌握如何建立拉压强度条件，并通过强度条件进行强度校核、截面设计和许可载荷的有关计算；
4. 熟练掌握利用虎克定律计算拉压直杆的变形，掌握“用切线代替圆弧”的求解方法；
5. 掌握一般拉压超静定问题的求解过程。
6. 明确低碳钢和灰铸铁两种材料在拉伸和压缩时的机械性质，掌握  $\sigma_s$  ( $\sigma_{0.2}$ )、 $\sigma_b$ 、 $\delta$ 、 $\psi$  等强度指标和塑性指标的意义和测定方法，明确拉压弹性模量 $E$ 、泊松比 $\mu$ 和拉压刚度 $EA$ 的概念；
7. 明确许用应力 $[\sigma]$ 和安全因数的概念；
8. 了解应力集中现象。

# 第三章 扭转

- ◆ 概述
- ◆ 外力偶矩、扭矩和扭矩图
- ◆ 圆轴扭转的应力
- ◆ 圆轴扭转的强度条件
- ◆ 圆轴扭转的破坏分析
- ◆ 圆轴扭转的变形与刚度条件
- ◆ 非圆截面杆和薄壁杆扭转
- ◆ 受扭构件的合理设计
- ◆ 扭转超静定问题



航天航空学院--力学中心

## 3-1 概述

- 扭转的概念：受扭转杆件的力学模型为：



- 模型的特征：
- 1) 构件多为圆截面等直杆；
  - 2) 外力偶的矢量方向与杆轴线平行；
  - 3) 横截面之间绕杆轴线产生相对角位移。

- 具有上述特征的变形称为**扭转(Torsion)**变形。  
工程上，把承受扭转变形的杆件称为“**轴(Shaft)**”。
- 横截面之间的相对角位移，称为**扭转角(Angle of Twist)**。

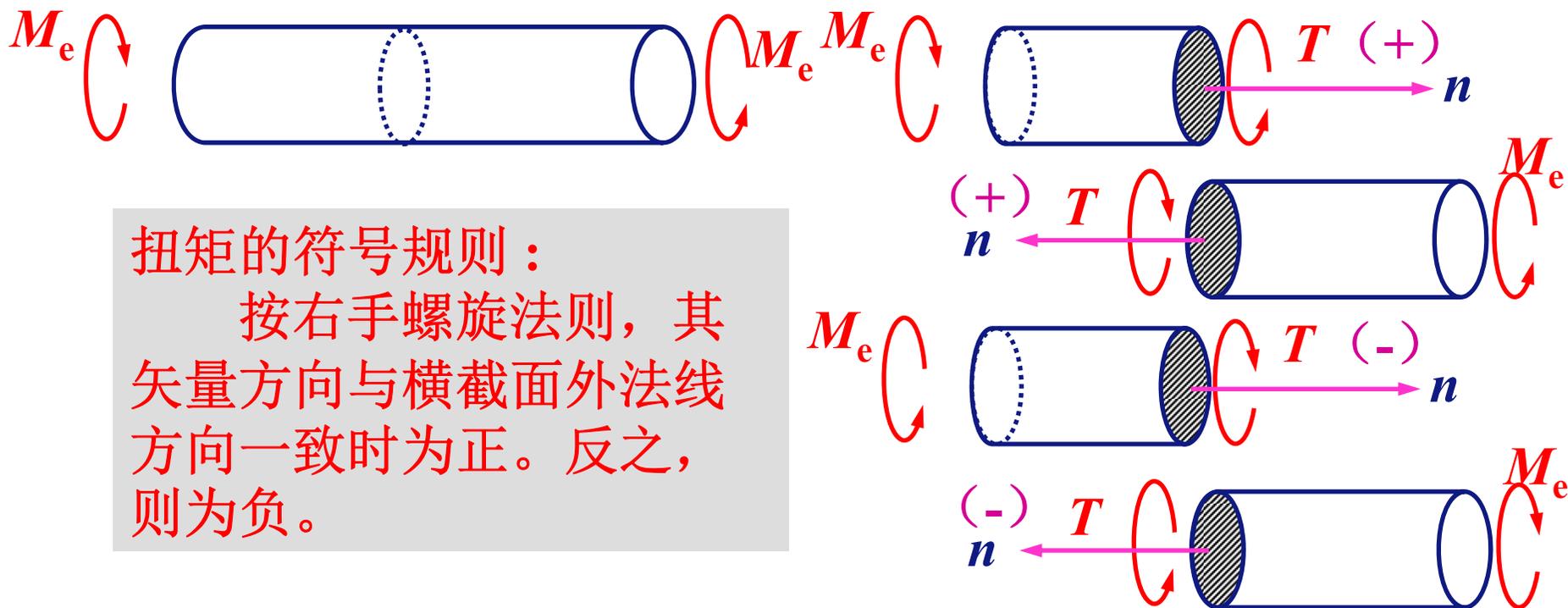
## 3-2 外力偶矩、扭矩和扭矩图

- 外力偶矩（即转矩 $M_e$ ）的计算

若功率的单位为千瓦：
$$M_e = 9549 \frac{N}{n} \quad (\text{N m})$$

若功率的单位为马力：
$$M_e = 7024 \frac{N}{n} \quad (\text{Nm})$$

- 内力偶矩（即扭矩 $T$ ）的计算



## 3-2 外力偶矩、扭矩和扭矩图

**例**  $B$  轮为主动轮,  $A$ 、 $C$  为从动轮, 已知  $N_A=19\text{kW}$ ,  $N_B=44\text{kW}$ ,  $N_C=25\text{kW}$ ,  $n=150\text{rpm}$ 。作图示传动轴的扭矩图。

**解:** 1. 求外力偶

$$M_e^A = 9549 \frac{19}{150} = 1210 \text{ Nm}$$

同理  $M_e^B=2800\text{Nm}$ ,  $M_e^C=1590\text{Nm}$

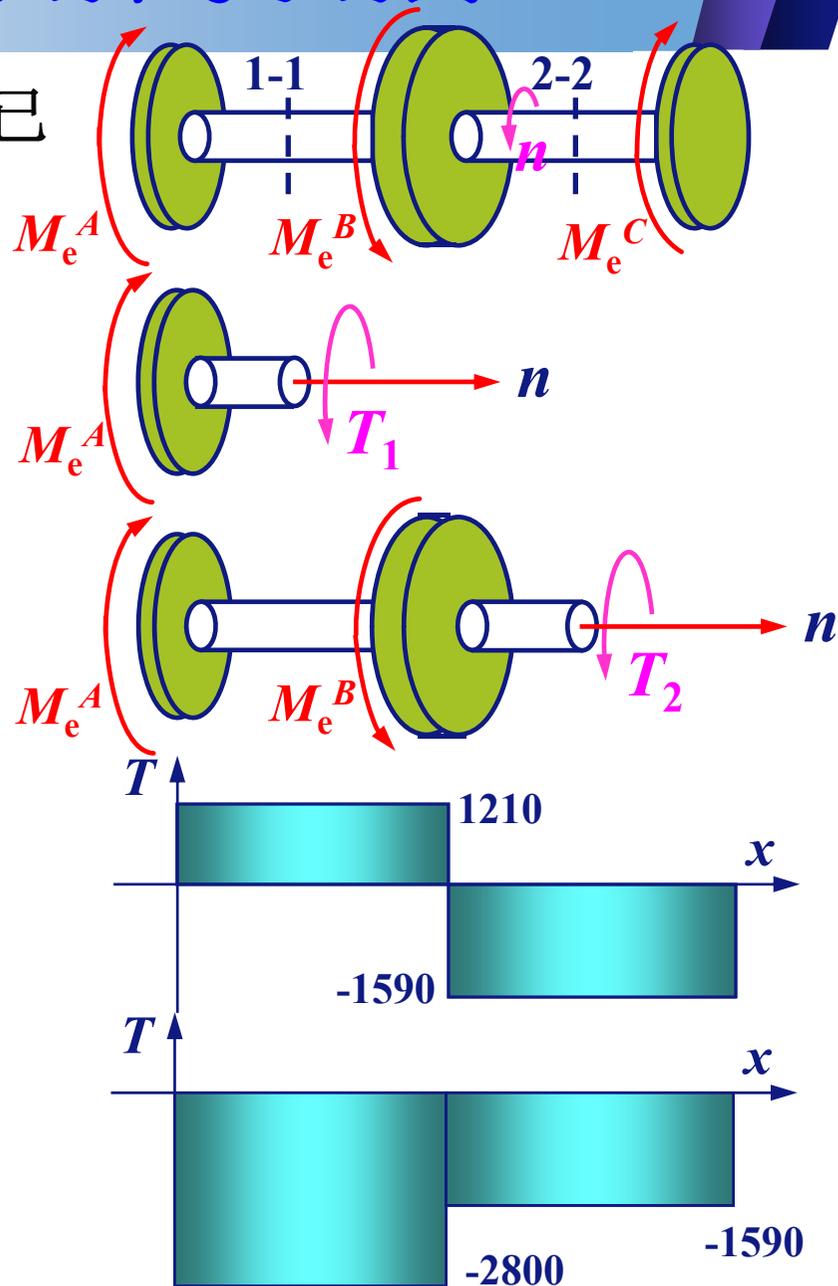
2. 截面法求内力(设正法)

$$T_1 - M_e^A = 0 \rightarrow T_1 = 1210 \text{ Nm}$$

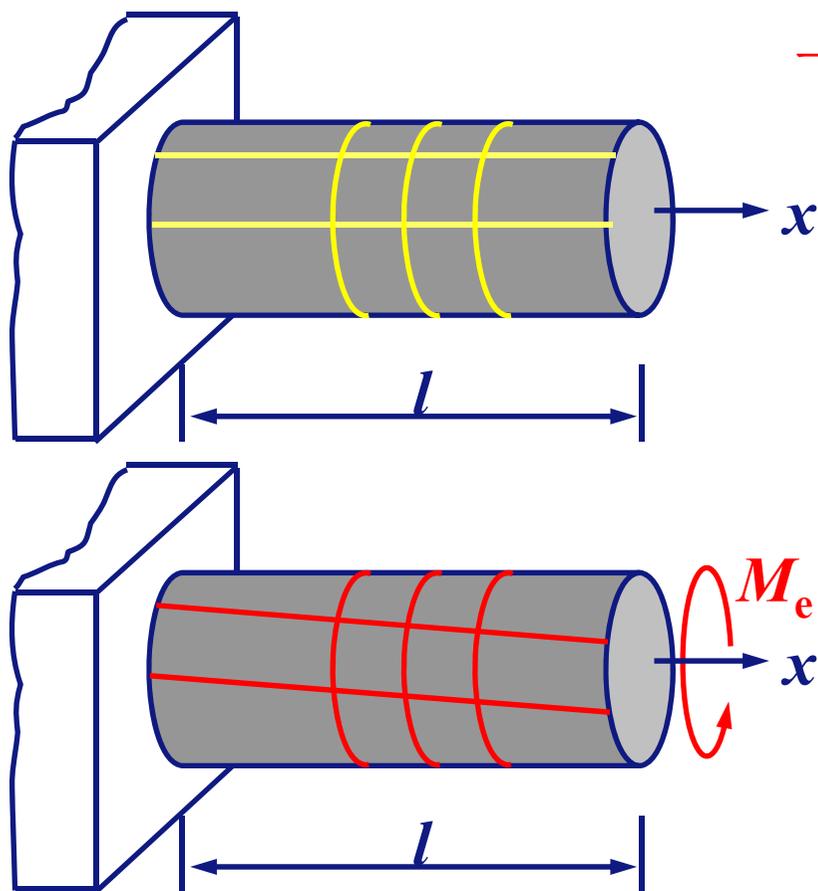
$$T_2 - M_e^A + M_e^B = 0 \rightarrow T_2 = -1590 \text{ Nm}$$

3. 作内力图

4. 讨论: 若交换  $A$ 、 $B$  两轮的位置, 扭矩将如何变化?



## 3-3 圆轴扭转的应力



### 一、实验观察:

- A. 各纵向线倾斜角度相同;
- B. 各圆周线的形状、大小和间距不变, 只是绕轴线作相对转动;
- C. 正方形网格, 加外力偶后变成同样大小的平行四边形。

二、假设: 圆杆的横截面变形后仍保持为平面

三、推理:

由现象A、C → 横截面上有切应力;

由现象B → 横截面上无正应力。

## 3-3 圆轴扭转的应力

### 四、扭转切应力公式推导

#### 1、变形几何关系:

$$\gamma dx = d\varphi R \quad \gamma_\rho dx = \rho d\varphi \quad \gamma_\rho = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

#### 2、物理条件:

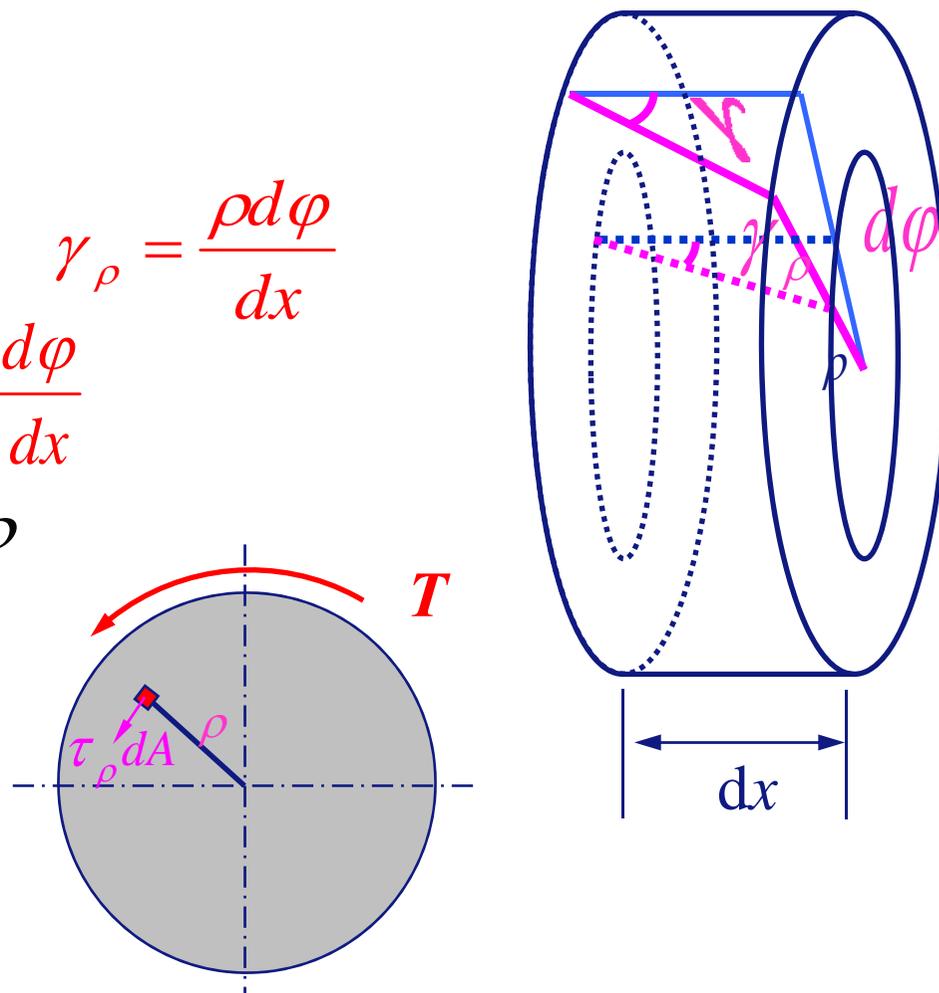
$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

#### 3、平衡条件:

$$dT = \tau_\rho dA \times \rho$$

$$\begin{aligned} T &= \int dT = \int \tau_\rho dA \times \rho \\ &= \int_A G \times \rho \times \frac{d\varphi}{dx} \times dA \times \rho \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} I_P \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_P} \quad \tau_\rho = \frac{T}{I_P} \rho$$



### 3-3 圆轴扭转的应力

$$\tau_{\rho} = \frac{T}{I_P} \rho \quad I_P = \int_A \rho^2 dA \quad \text{极惯性矩}$$

实心圆轴

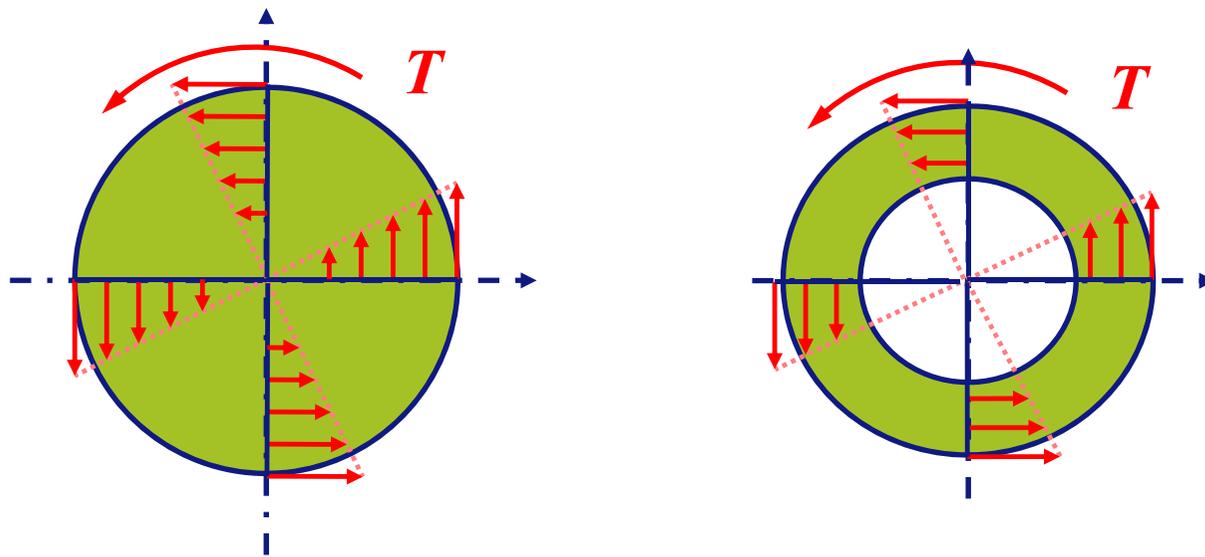
$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

空心圆轴

$$I_P = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

$(\alpha = d/D)$

五、扭转切应力在横截面上的分布规律



## 3-4 圆轴扭转的强度条件

一、扭转横截面上最大的切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} R = \frac{T}{W_p}$$

$W_p$  抗扭截面系数

实心圆轴

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

空心圆轴

$$W_p = \frac{\pi}{32R} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

二、扭转强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]$$

注意：强度条件中的应力只考虑大小！

三、扭转强度条件的应用：

- 1、校核强度；
- 2、设计截面；
- 3、确定许可载荷。

## 3-4 圆轴扭转的强度条件

例 汽车传动主轴  $D = 90 \text{ mm}$ ,  $d = 85 \text{ mm}$ ,  
 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ ,  $M_e = 1.5 \text{ kNm}$ 。校核轴的强度。



解:  $T = M_e = 1.5 \text{ kNm}$        $\alpha = d/D = 0.944$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = 29 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]$$

$$\tau_{\max} = T/W_p = 51.7 \text{ MPa} < [\tau] \quad \text{强度满足。}$$

讨论: (1) 改用实心轴, 最大应力不变时确定轴直径;

$$W'_p = \pi D'^3 / 16 = T / \tau_{\max} \quad D' = 53 \text{ mm}$$

(2) 比较实心轴和空心轴的重量:

$$\eta' = Q'/Q = A'/A = D'^2 / (D^2 - d^2) = 3.2$$

空心轴优于实心轴!

## 3-6 圆轴扭转的变形和刚度条件

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad \varphi = \int d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx$$

单位：弧度  
 $GI_p$ ：抗扭刚度

对于两端作用力偶的等直轴：
$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

单位长度扭转角：
$$\Phi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \left( \frac{^\circ}{\text{m}} \right)$$

刚度条件：
$$\Phi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\Phi]$$

许用单位长度扭转角 $[\Phi]$ ：	0.25~0.5 °/m	精密轴
	0.50~1.0 °/m	一般轴
	1.0 ~3.0 °/m	粗糙轴

## 3-6 圆轴扭转的变形和刚度条件

**例** 已知:  $[\tau]=40\text{MPa}$ ,  $G=80\text{GPa}$ ,  
 $[\Phi]=0.8^\circ/\text{m}$ , 确定圆轴的直径。

**解:**  $|T|_{\max}=1590\text{Nm}$

1、按强度条件:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \geq \frac{T}{[\tau]}$$

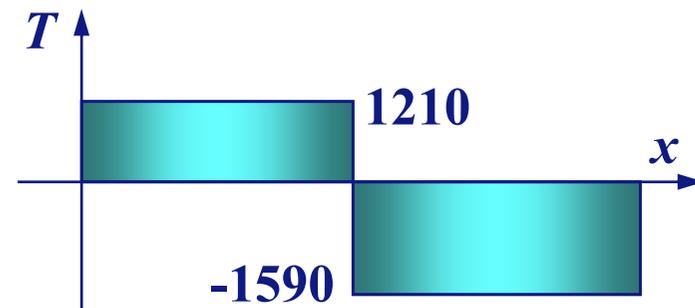
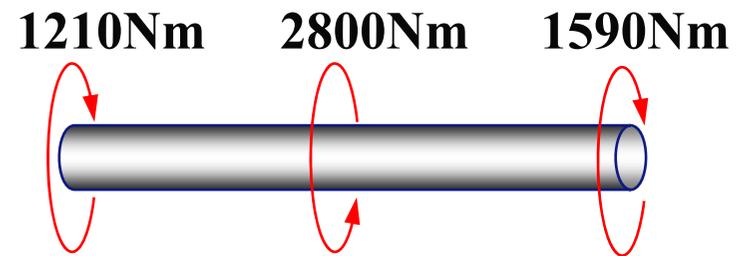
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = 58.7\text{mm}$$

2、按刚度条件:

$$\Phi = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\Phi]$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \geq \frac{T \times 180^\circ}{G\pi[\Phi]}$$

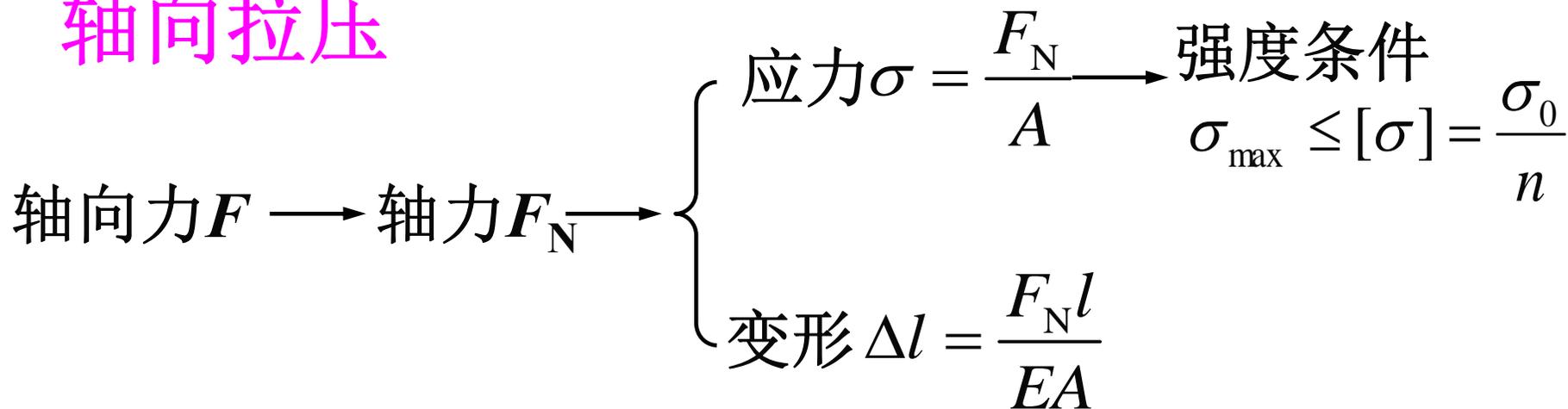
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \times \frac{T \times 180^\circ}{G\pi[\Phi]}} = 61.7\text{mm}$$



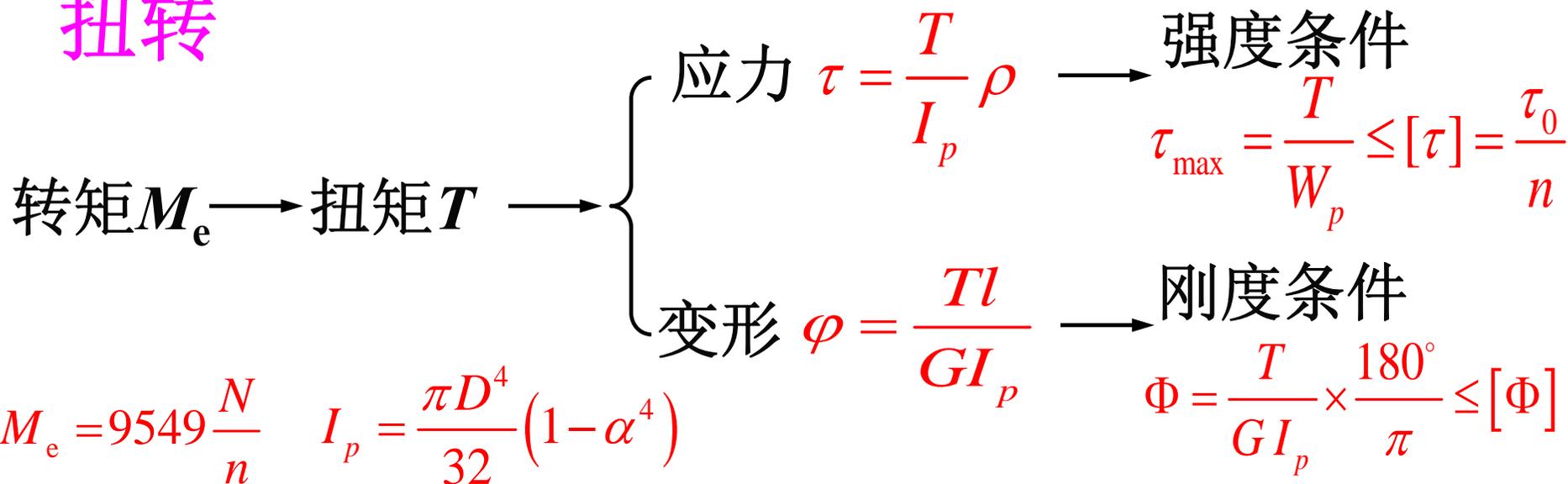
所以  $D=61.7\text{mm}$ 或 $62\text{mm}$

# 基本解题思路

## 轴向拉压

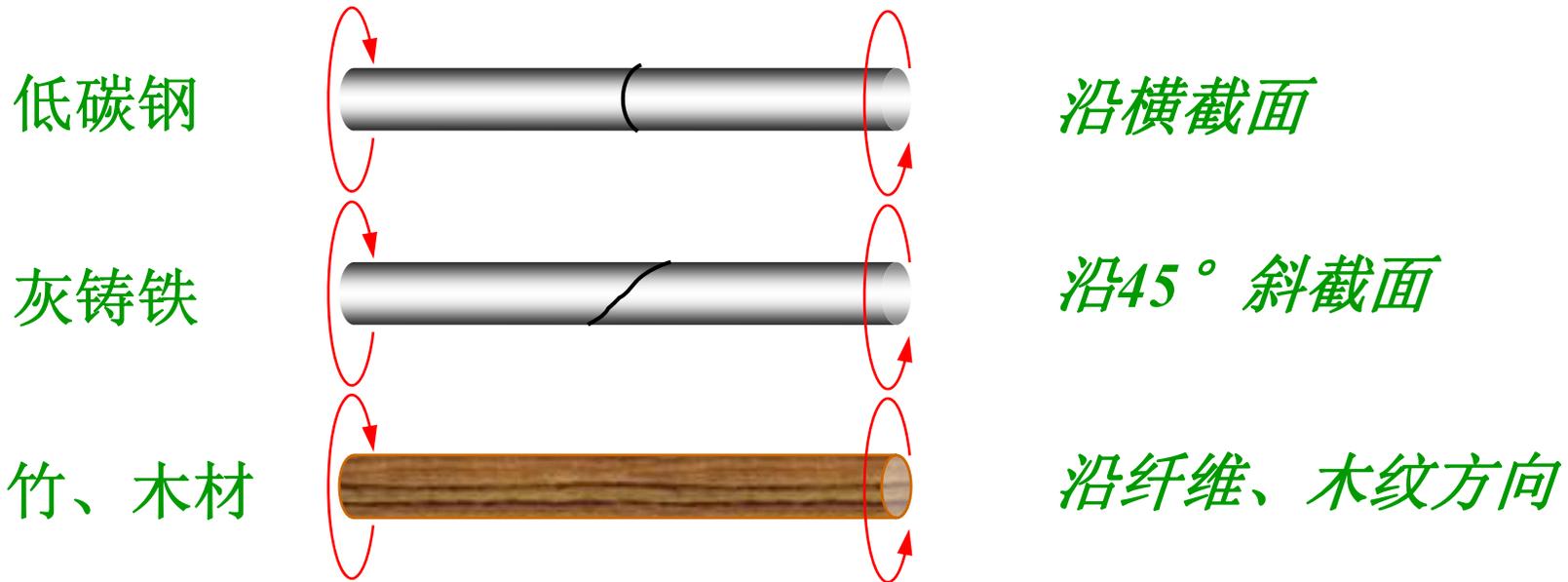


## 扭转

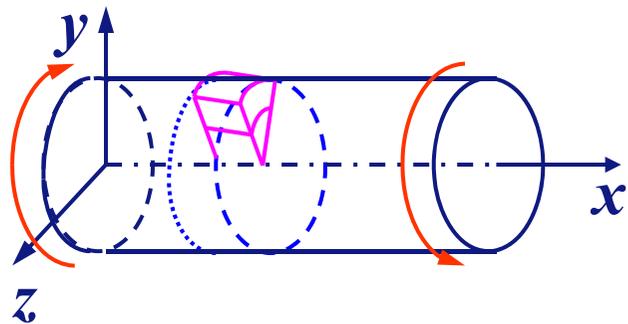


# 3-5 圆轴扭转破坏分析

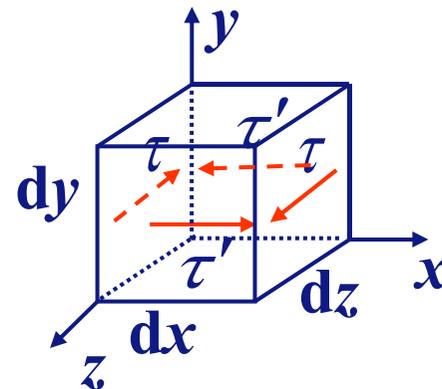
## 一、扭转破坏实验断口



## 二、切应力互等定理



$$(\tau dz dy) dx = (\tau' dx dy) dz$$

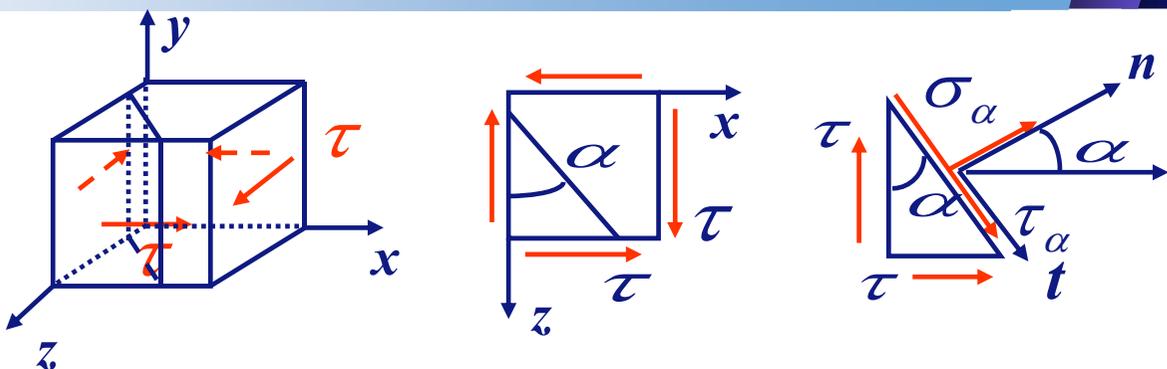


单元体

$$\tau = \tau'$$

## 3-5 圆轴扭转破坏分析

### 三、斜截面上的应力分析



$$\sum F_n = 0 \quad \sigma_\alpha dA + \tau dA \cos \alpha \sin \alpha + \tau dA \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \quad \tau_\alpha dA - \tau dA \cos \alpha \cos \alpha + \tau dA \sin \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$$

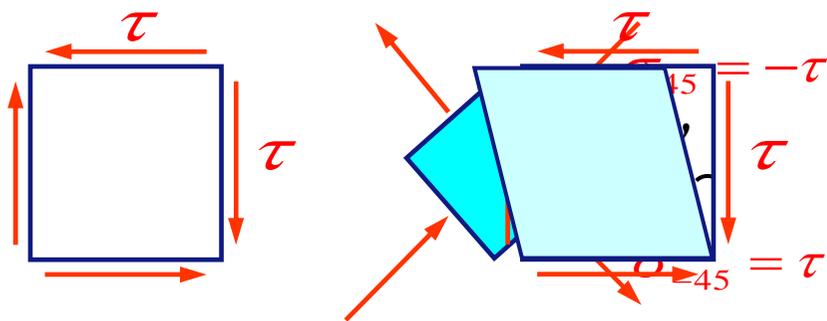
$$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$$

讨论  $\alpha = 0^\circ \quad \tau_{0^\circ} = \tau_{\max} = \tau \quad \sigma_{0^\circ} = 0$

$\alpha = 90^\circ \quad \tau_{90^\circ} = \tau_{\min} = -\tau \quad \sigma_{90^\circ} = 0$

$\alpha = -45^\circ \quad \sigma_{-45^\circ} = \sigma_{\max} = \tau \quad \tau_{-45^\circ} = 0$

$\alpha = 45^\circ \quad \sigma_{45^\circ} = \sigma_{\min} = -\tau \quad \tau_{45^\circ} = 0$



剪切胡克定律:  $\tau = G\gamma$

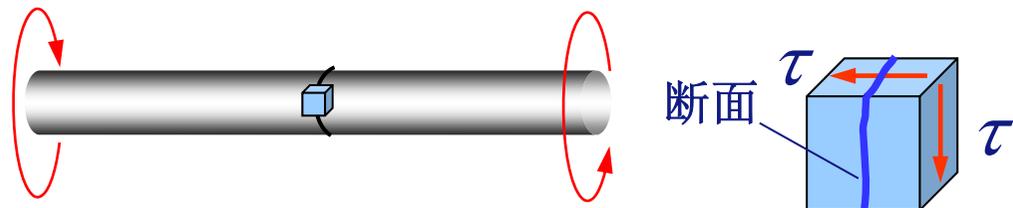
$G$ : 切变模量

$\gamma$ : 切应变 (直角的变化量)

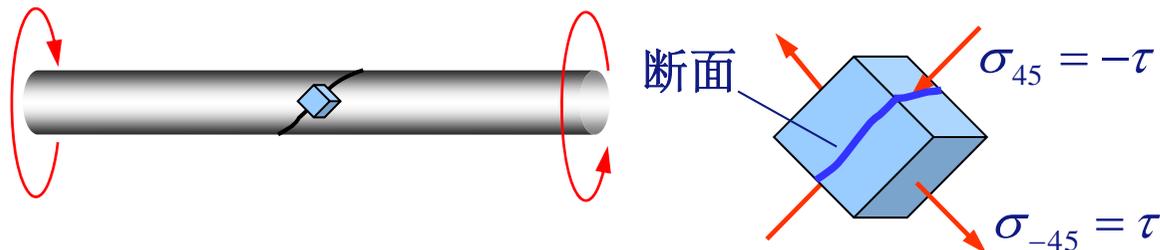
## 3-5 圆轴扭转破坏分析

### 四、破坏分析

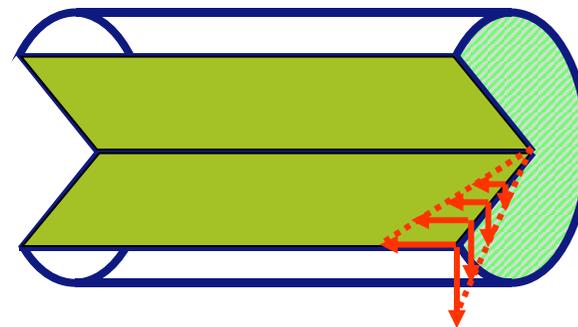
低碳钢： 抗拉强度=抗压强度 > 抗剪强度



灰铸铁： 抗压强度 > 抗剪强度 > 抗拉强度



竹、木材： 横向抗剪强度 > 纵向抗剪强度



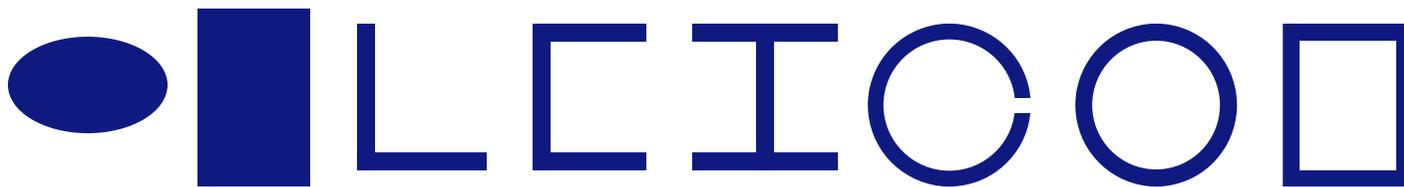
## 3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

□ 实验和弹性理论分析表明：非圆截面扭转时，横截面不再保持平面，切应力不再与各点到形心的距离成正比。

□ 非圆截面扭转时，端面或其他部位不受任何约束，各横截面可以自由翘曲，且翘曲形状相同，横截面上只有切应力，称为自由扭转(Free torsion)。

□ 非圆截面扭转时，端面或其他部位受约束作用，各横截面不能自由翘曲，翘曲形状将不相同，横截面上将不仅有切应力，还有正应力，称为约束扭转(Restrictive torsion)。

□ 常见截面类型：椭圆截面、矩形截面、开口薄壁、闭口薄壁。



## 3-8 受扭杆件的合理设计

● 前提：经济、安全

● 目的：节省材料、提高强度和刚度

● 途径：
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

● 措施：**1、合理选择截面形状**

- 空心截面较实心截面好
- 不宜过薄，会发生皱折现象
- 圆形较其他形状好
- 闭口截面较开口截面好

**2、合理选择材料**

- 不宜选取抗拉强度和抗压强度不等的材料
- 不宜选取抗剪强度横向和纵向不等的材料
- 剪切弹性模量 $G$ 大的材料，刚度好

### 3-9 扭转超静定问题

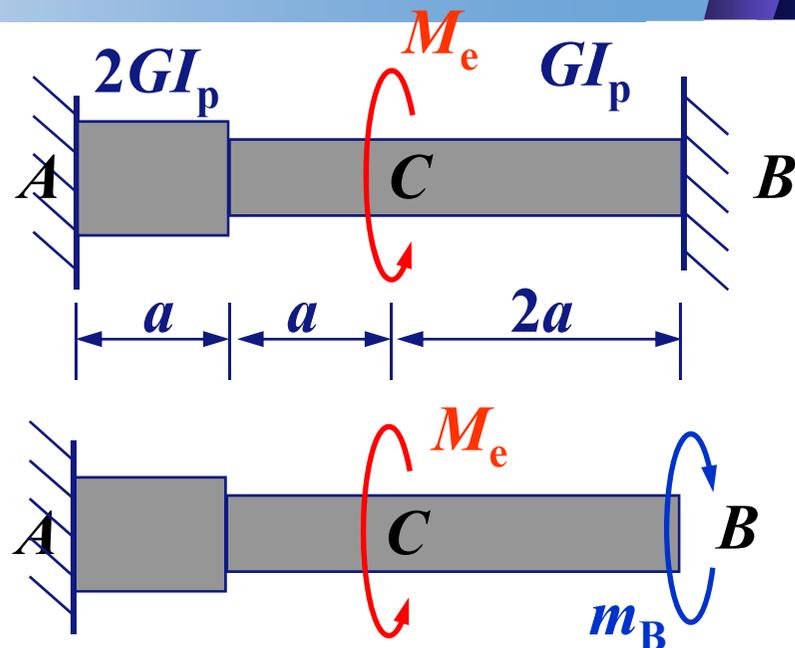
**例** 两端固定的阶梯圆截面杆，  
在C处受一力偶 $M_e$ ，求支反力偶。

**解：** 解除B端约束，以 $m_B$ 代替

**平衡条件：**  $T_{BC} = -m_B$   $T_{CA} = M_e - m_B$

**变形条件：**  $\varphi_{BA} = \varphi_{BC} + \varphi_{CA} = 0$

**物理条件：**  $\varphi_{BC} = \frac{T_{BC} 2a}{GI_P}$



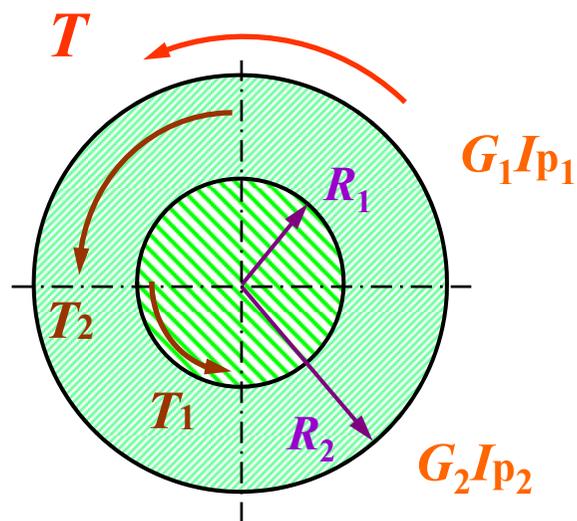
$$\varphi_{CA} = \frac{T_{CA} a}{GI_P} + \frac{T_{CA} a}{2GI_P}$$

将物理条件代入变形条件，  
并与平衡条件联立求解。

$$m_A = \frac{4}{7} M_e \quad m_B = \frac{3}{7} M_e$$

## 3-9 扭转超静定问题

**例** 由实心杆 1 和空心杆 2 组成的组合轴，受扭矩  $T$ ，两轴之间无相对滑动，求各点切应力。



**解：** 设实心杆和空心杆承担的扭矩分别为  $T_1$ 、 $T_2$ 。

平衡方程

$$T_1 + T_2 = T$$

几何方程

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

物理方程

$$\Phi_1 = \frac{T_1}{G_1 I_{P1}} \quad \Phi_2 = \frac{T_2}{G_2 I_{P2}}$$

联立求解

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

$$T_1 = \frac{G_1 I_{P1}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} T \quad T_2 = \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} T$$

$$\tau_1 = \frac{T G_1 \rho}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} \quad (0 \leq \rho \leq R_1)$$

$$\tau_2 = \frac{T G_2 \rho}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

# 基本解题思路

外力（转矩  $M_e$ ） $\xrightarrow{\text{截面法}}$  内力（扭矩  $T$ ） $\longrightarrow$

$$M_e = 9549 \frac{N}{n} \quad M_e = 7024 \frac{N}{n} \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

应 力  $\tau_\rho = \frac{T}{I_p} \rho \longrightarrow$  强度条件  $\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]$

变 形  $\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \longrightarrow$  刚度条件  $\Phi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\Phi]$

## 第三章的基本要求

1. 掌握根据轴的传递功率和转速计算外力偶矩；
2. 掌握扭转时内力（即扭矩）的计算以及扭矩图的画法；
3. 了解圆轴扭转时横截面上切应力的推导过程，掌握切应力的计算方法；
4. 掌握圆轴扭转时扭转角的计算方法；
5. 熟练掌握圆轴扭转时强度条件和刚度条件的建立，并利用强度条件和刚度条件进行安全校核和设计。
6. 了解不同材料圆轴扭转的破坏分析，明确纯剪切应力状态的概念，掌握切应力互等定理；
7. 了解非圆截面杆扭转时的应力和变形计算；
8. 掌握扭转超静定问题的计算方法。

# 附录A 截面图形的几何性质

- ◆ 概述
- ◆ 静矩和形心
- ◆ 惯性矩和惯性积
- ◆ 平行移轴公式
- ◆ 转轴公式、主惯矩与主惯轴



航天航空学院--力学中心

# A-1 静矩和形心

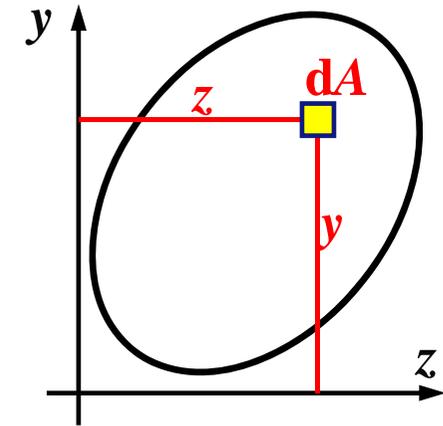
## 一、静矩的定义 (First Moment)

$$S_z = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A z dA$$

静矩的性质：

- 同一截面对不同坐标轴的静矩不同；
- 静矩的数值可为正，可为负，可为零；
- 静矩的量纲为 $m^3$ 。

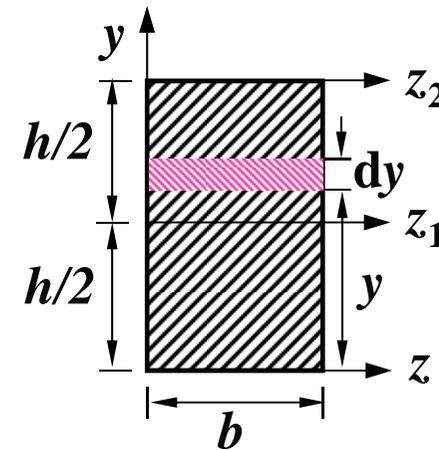


例 已知图示截面，求： $S_z, S_{z_1}, S_{z_2}$

解：
$$S_z = \int_A y dA = \int_0^h y dy b = \frac{1}{2} b h^2$$

$$S_{z_1} = \int_{-h/2}^{h/2} y dy b = 0$$

$$S_{z_2} = \int_{-h}^0 y dy b = -\frac{1}{2} b h^2$$

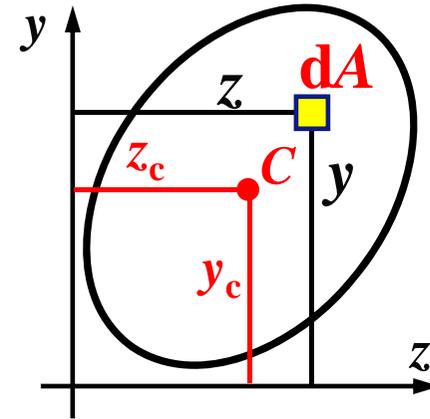


# A-1 静矩和形心

## 二、形心 (Centroid) 的定义

$$S_z = \int_A y dA = y_c A \quad y_c = S_z / A$$

$$S_y = \int_A z dA = z_c A \quad z_c = S_y / A$$



利用上式:

- 1、若已知截面面积和形心坐标，可以计算截面对坐标轴的静矩；
- 2、若已知截面面积及其对坐标轴的静矩，可以确定截面的形心坐标。

形心的性质:

- 1、截面对某轴的静矩为零，则该轴必通过截面的形心；
- 2、截面图形对通过截面形心的轴的静矩必等于零。

# A-1 静矩和形心

## 三、组合图形的形心位置

组合图形A由若干基本图形 $A_i$ 组成，若已知每一个基本图形的形心坐标及面积，则组合图形的静矩为：

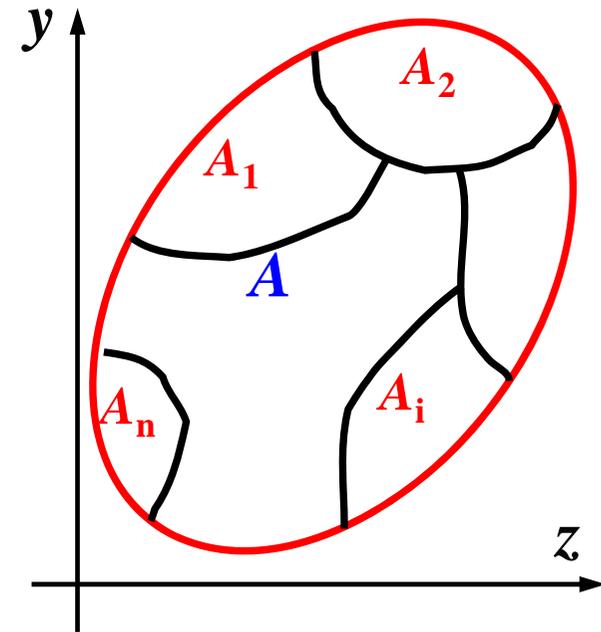
$$S_z = \sum_{i=1}^n S_{zi} = \sum_{i=1}^n A_i y_{ci}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{yi} = \sum_{i=1}^n A_i z_{ci}$$

组合图形的形心坐标为：

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$$



## A-1 静矩和形心

**例** 求图示T形截面的形心坐标。

**解：** 建参考坐标系， $y$  轴为对称轴。

将T形截面看成由两个矩形组成。

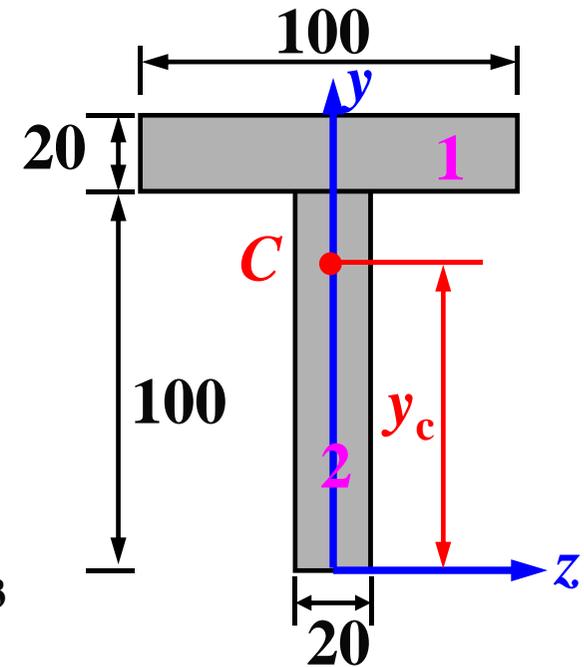
$$A = A_1 + A_2 = 20 \times 100 + 100 \times 20 = 4000 \text{mm}^2$$

$$S_{z1} = A_1 \times y_{c1} = 2000 \times (100 + 10) = 2.2 \times 10^5 \text{mm}^3$$

$$S_{z2} = A_2 \times y_{c2} = 2000 \times (100/2) = 1 \times 10^5 \text{mm}^3$$

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = 3.2 \times 10^5 \text{mm}^3$$

$$y_c = S_z / A = 80 \text{mm} \quad z_c = 0$$



## A-2 惯性矩和惯性积

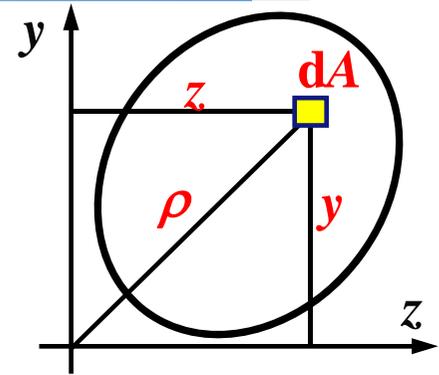
定义:

$I_p = \int_A \rho^2 dA$  截面图形面积A对坐标原点的极惯性矩;

$I_y = \int_A z^2 dA$  截面图形面积A对y轴的惯性矩;

$I_z = \int_A y^2 dA$  截面图形面积A对z轴的惯性矩;

$I_{yz} = \int_A yz dA$  截面图形面积A对正交坐标轴y、z的惯性积;



性质:

- 同一截面对不同坐标轴的 $I_p$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 、 $I_{yz}$ 不同;
- $I_p > 0$ ,  $I_y > 0$ ,  $I_z > 0$ ,  $I_{yz}$ 可为正, 可为负, 可为零;
- $I_p$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 、 $I_{yz}$ 的量纲为 $m^4$ ;
- $I_p = I_y + I_z$ ;
- 若有一个轴为对称轴, 则 $I_{yz} = 0$ 。

极惯性矩 polar moment of inertia

惯性矩 moment of inertia

惯性积 product of inertia

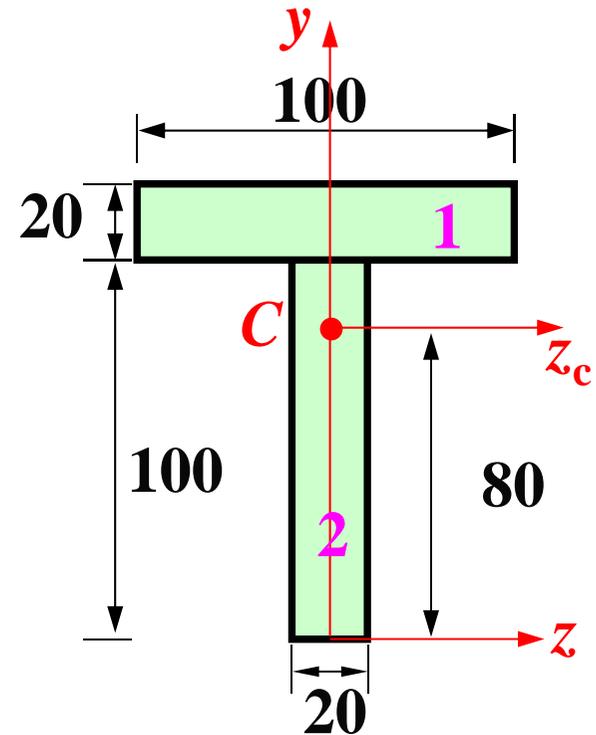
## A-2 惯性矩和惯性积

例 计算T形截面的惯性矩 $I_{zc}$ 、 $I_z$ 。

解：形心坐标已求出，为(0, 80)

$$I_{zc} = \int_{100-80}^{100-80+20} y^2 100 dy + \int_{-80}^{100-80} y^2 20 dy$$
$$= 5.333 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \int_{100}^{100+20} y^2 100 dy + \int_0^{100} y^2 20 dy$$
$$= 30.933 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



## A-3 平行移轴公式

$$I_{z_c} = \int_A y_c^2 dA$$

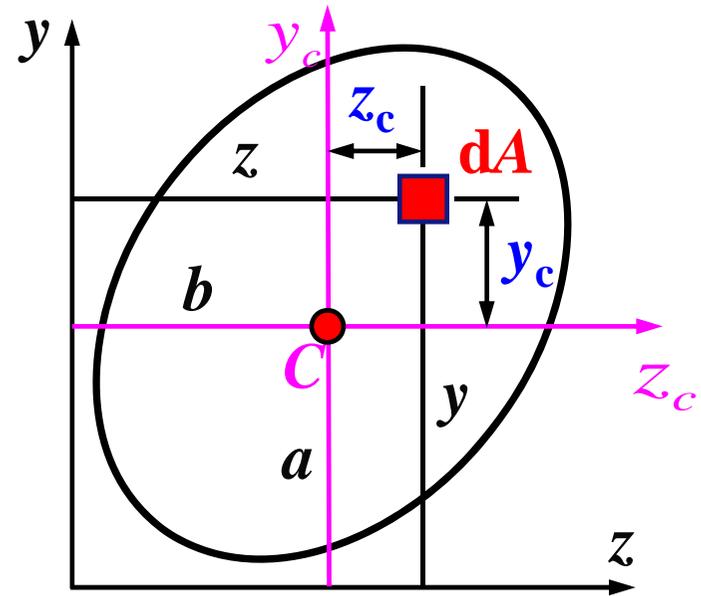
$$I_z = \int_A y^2 dA \quad y = y_c + a$$

$$I_z = \int_A (y_c + a)^2 dA$$

$$= \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 A$$

$$= I_{z_c}$$

$$= 0$$



$$I_z = I_{z_c} + a^2 A \quad I_y = I_{y_c} + b^2 A \quad I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

运用平行移轴公式应注意以下两点：

- (1) 轴 $y_c$ 、 $z_c$ 过截面形心；
- (2) 轴 $y$ 、 $z$ 分别与轴 $y_c$ 、 $z_c$ 平行。

## A-3 平行移轴公式

例 计算T形截面的惯性矩 $I_{z_c}$ 、 $I_z$ 。

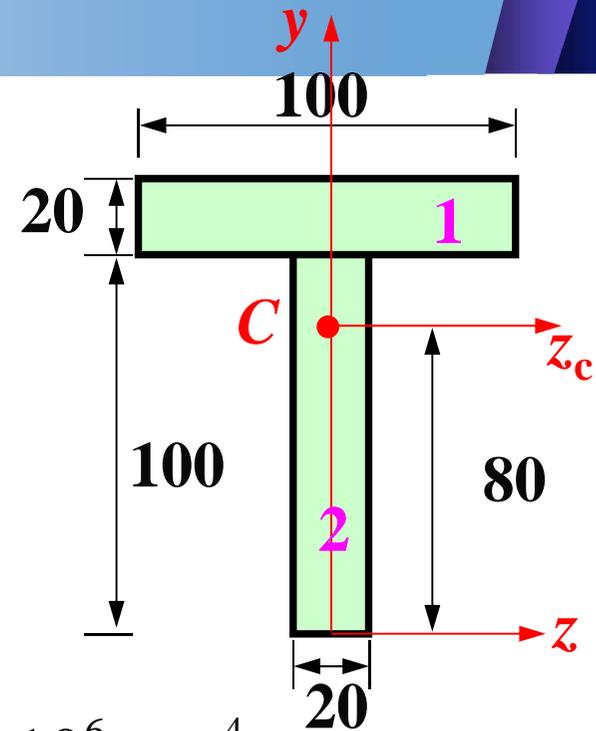
解：形心坐标已求出，为 $(0, 80)$

利用公式：
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_c} = \left( \frac{100 \times 20^3}{12} + 30^2 \times 100 \times 20 \right) + \left( \frac{20 \times 100^3}{12} + 30^2 \times 20 \times 100 \right) = 5.333 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \left( \frac{100 \times 20^3}{12} + 110^2 \times 100 \times 20 \right) + \left( \frac{20 \times 100^3}{12} + 50^2 \times 20 \times 100 \right) = 30.933 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

或者：
$$I_z = I_{z_c} + 80^2 \times (2 \times 20 \times 100) = 30.933 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



## A-4 转轴公式、主惯矩与主惯轴

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

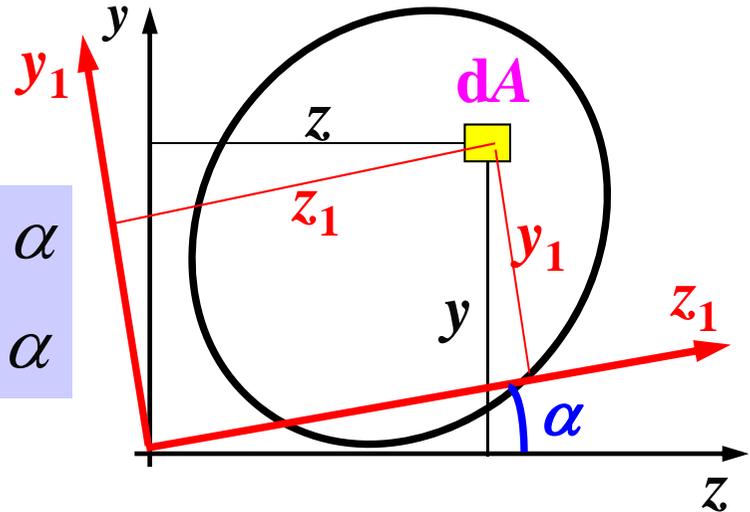
$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha$$



$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = C$$

## A-4 转轴公式、主惯矩与主惯轴

□ 使 $I_{y_0z_0} = 0$  的一对坐标轴称为**主惯轴 (Principal Axes)**。

□ 此时的 $I_{y_0}$ ,  $I_{z_0}$  称为**主惯矩 (Principal Moment of Inertia)**。

$$I_{y_0z_0} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha = 0 \quad \tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

$$I_{y_0} = \frac{I_z + I_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$$
$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$$

□ 过形心的主惯矩称为**形心主惯轴**，其惯性矩为**形心主惯矩**。

□ **主惯矩**是所有通过 $O$ 点的各轴惯性矩的最大、最小值。

□ **形心主惯轴和形心主惯矩的确定**：1、确定形心位置；2、建平行于原坐标轴的形心轴，并利用平行移轴公式计算对形心轴的惯性矩和惯性积；3、令惯性积为零，计算转角，确定形心主惯轴的方向；4、计算形心主惯矩。

□ 本节只要求了解概念，计算不要求。

## 附录A的基本要求

1. 明确静矩、形心的概念，掌握组合图形的形心求法。
2. 明确极惯性矩、惯性矩和惯性积的概念。
3. 熟练掌握平行移轴公式的使用。
4. 了解转轴公式的使用。

# 第四章 弯曲内力

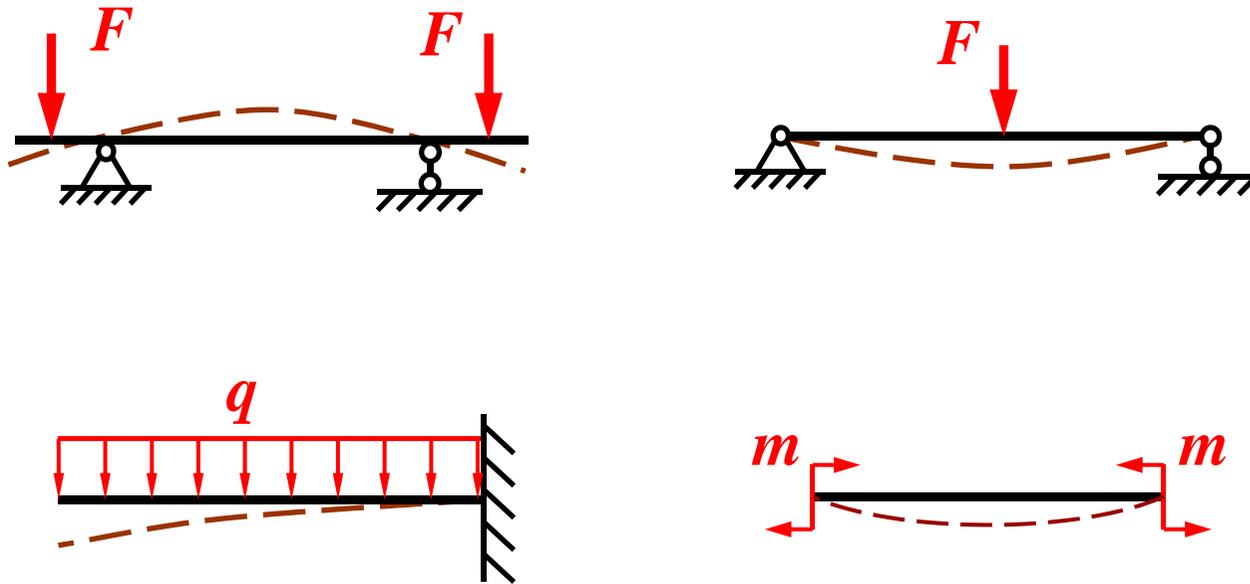
- ✓ 概述
- ✓ 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图
- ✓ 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系
- ✓ 刚架和曲杆的弯曲内力



航天航空学院--力学中心

# 4-1 概述

## 一、力学模型：

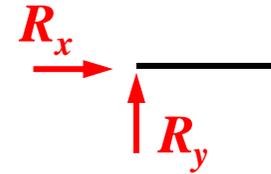
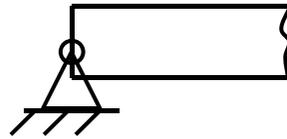


- ◆ **受力特点：** 力偶或外力作用垂直于轴线。
- ◆ **变形特点：** 杆件的轴线由直线变为曲线。
- ◆ 以**弯曲(Bending)**为主要变形的杆称之为**梁(Beam)**。

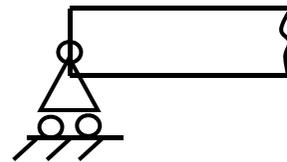
# 4-1 概述

## 二、支座形式:

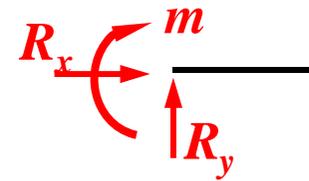
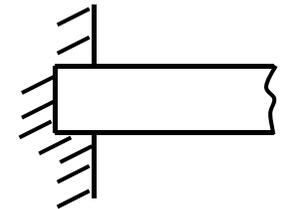
● 固定铰支座:



● 活动铰支座:



● 固定端:



## 三、静定梁的形式:



简支梁



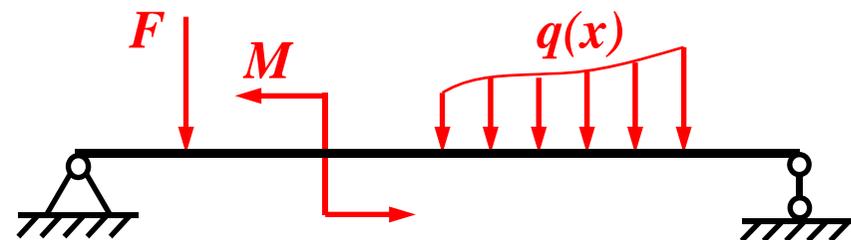
外伸梁



悬臂梁

## 四、载荷的形式:

集中力 集中力偶 分布力

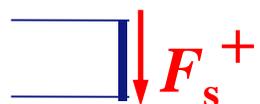
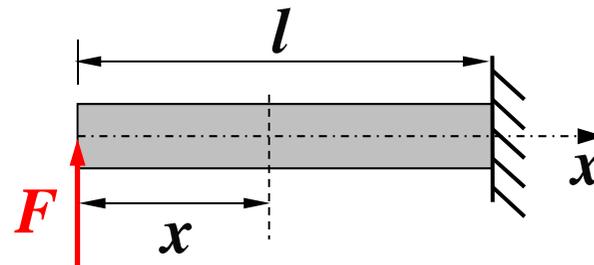


## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

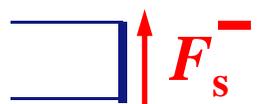
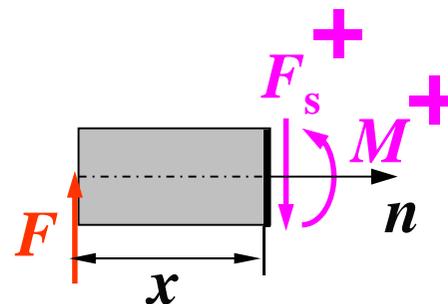
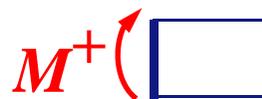
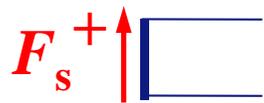
$$\sum F_y = 0 \quad F_s = F \quad F_s \text{ 称为剪力}$$

$$\sum m = 0 \quad M = Fx \quad M \text{ 称为弯矩}$$

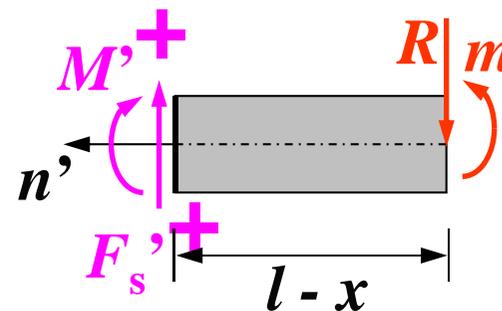
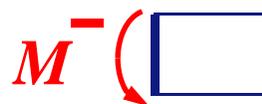
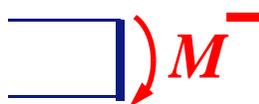
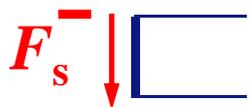
$$F'_s = F_s = F \quad M' = M = Fx$$



**剪力的符号规则：**  
截面外法线顺时针转90度后与剪力方向一致时，该剪力为正；反之为负。



**弯矩的符号规则：**  
使分离体弯曲成凹面向上的弯矩为正；使分离体弯曲成凹面向下的弯矩为负。



## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

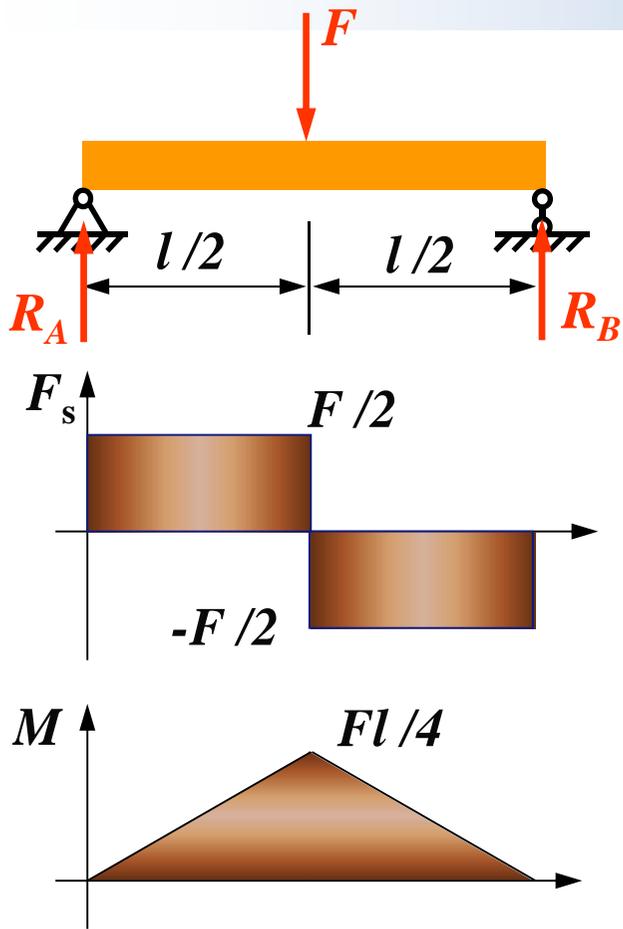
● **剪力、弯矩方程**：用方程的形式表达 $F_s$ 和 $M$ 沿梁轴线的变化规律；

● **剪力、弯矩图**：用图线的形式表达 $F_s$ 和 $M$ 沿梁轴线的变化规律；

● **力区**：能用一个方程来表达内力的变化规律的区间。

● **设正法**：由于截面上内力的方向未知，故将截面上的内力均假设为正值，若求出为正，说明假设与实际一致，作内力图时画在轴线的上方；若求出为负，说明假设与实际相反，作内力图时画在轴线的下方。

## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图



4、最大值:

$$|F_s|_{\max} = F/2 \quad |M|_{\max} = Fl/4$$

5、讨论:

例 作内力图。

解: 1、支反力:  $R_A = F/2, R_B = F/2$

2、剪力方程和弯矩方程:

$$F_{s1} = \frac{1}{2} F$$

$$M_1 = \frac{1}{2} Fx$$

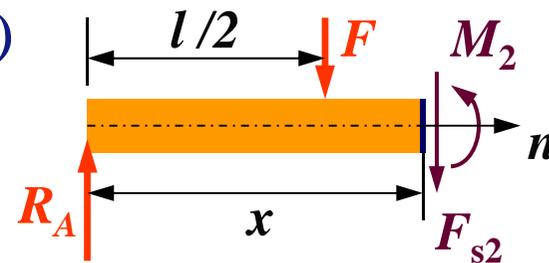
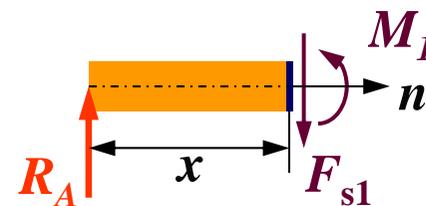
$$(0 \leq x \leq l/2)$$

$$F_{s2} = -\frac{1}{2} F$$

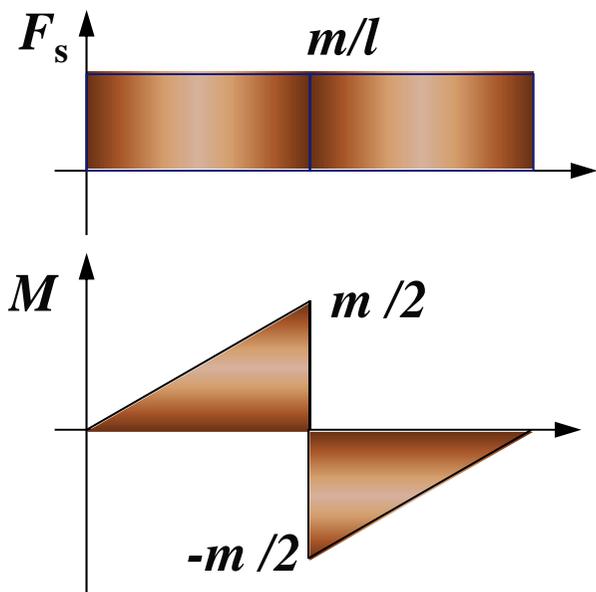
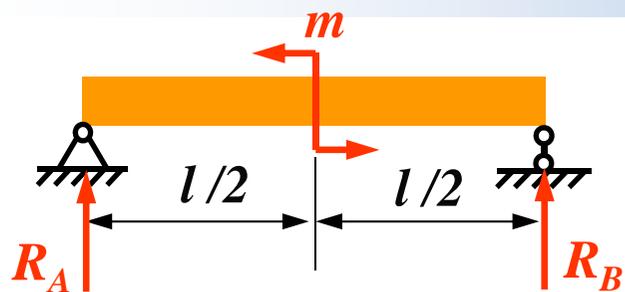
$$M_2 = \frac{1}{2} F(l - x)$$

$$(l/2 \leq x \leq l)$$

3、剪力图和弯矩图:



## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图



4、最大值：

$$|F_s|_{\max} = m/l \quad |M|_{\max} = m/2$$

5、讨论：

例 作内力图。

解：1、支反力： $R_A = m/l$   $R_B = -m/l$

2、剪力方程和弯矩方程：

$$F_{s1} = \frac{m}{l}$$

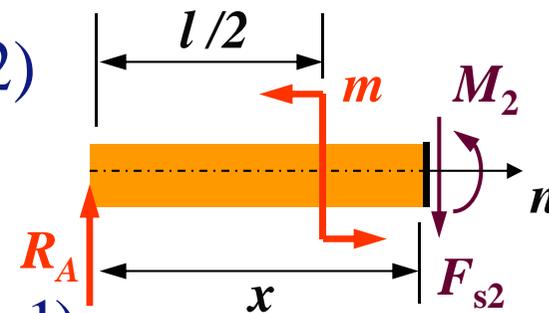
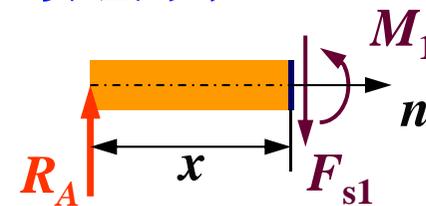
$$M_1 = \frac{m}{l} x$$

$$(0 \leq x \leq l/2)$$

$$F_{s2} = \frac{m}{l}$$

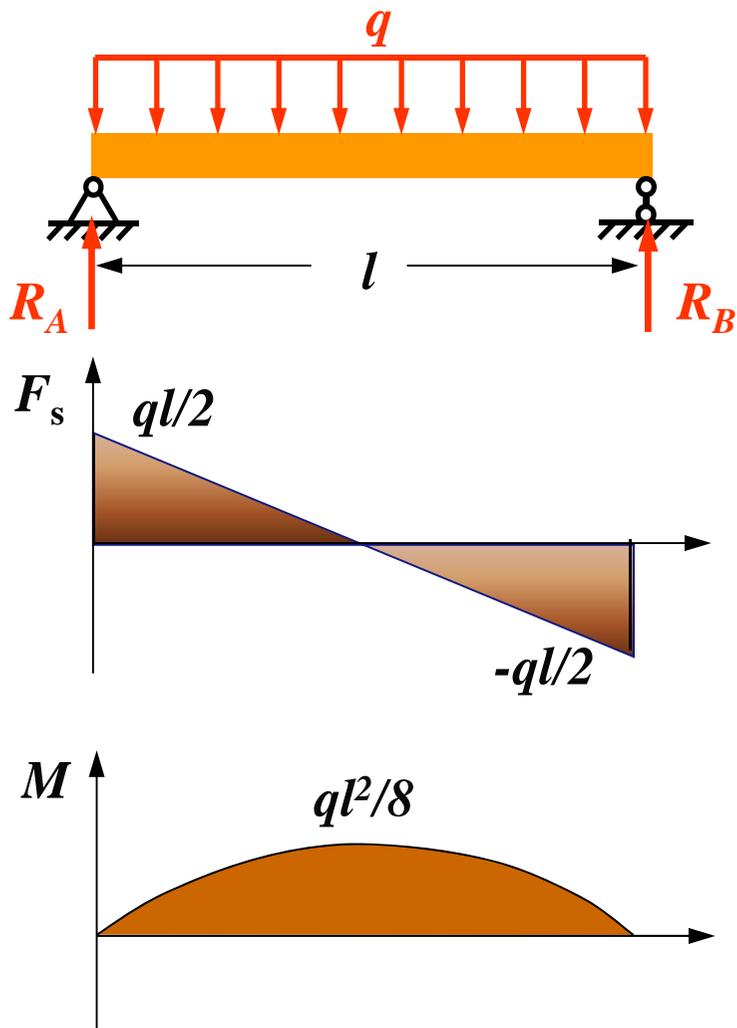
$$M_2 = m\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$(l/2 \leq x \leq l)$$



3、剪力图和弯矩图：

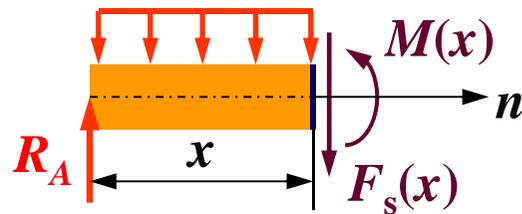
## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图



例 作内力图。

解：1、支反力： $R_A=R_B=ql/2$

2、剪力方程和弯矩方程：



$$F_s = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

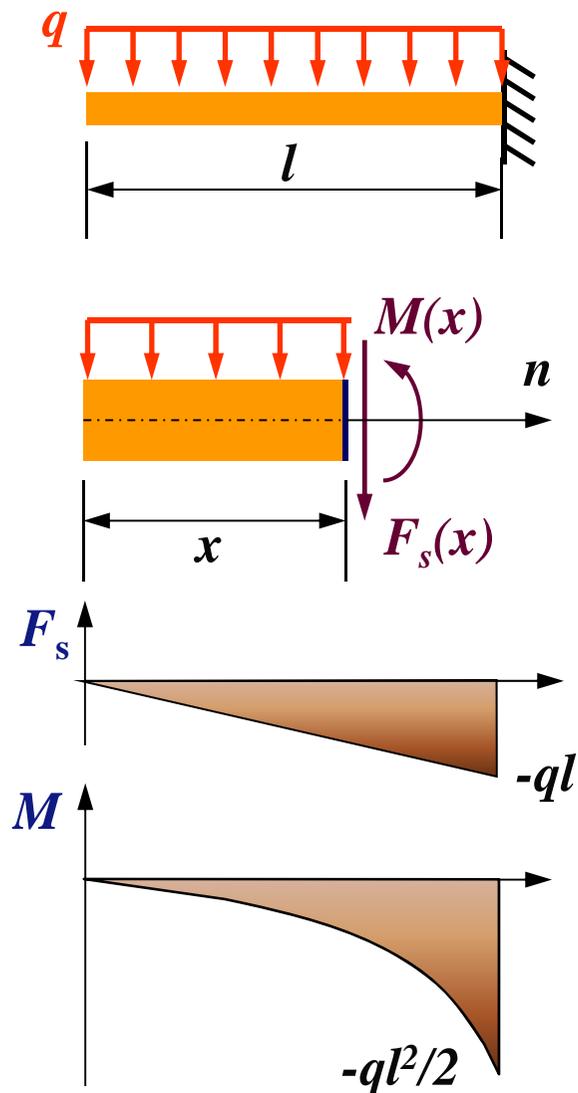
3、剪力图和弯矩图：

4、最大值：

$$|F_s|_{\max} = ql/2 \quad |M|_{\max} = ql^2/8$$

5、讨论：

## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图



例 作内力图。

解：1、剪力和弯矩方程

$$F_s(x) = -qx$$
$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

2、剪力图和弯矩图

3、最大值

$$|F_s|_{\max} = ql$$
$$|M|_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

4、讨论

## 4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例 求图示梁的剪力弯矩方程，并作 $F_s$ 、 $M$ 图。

解：(1) 支反力  $F_A = F_B = qa$

(2) 列 $F_s$ 、 $M$ 方程

$$F_s(x_1) = qa - qx_1$$

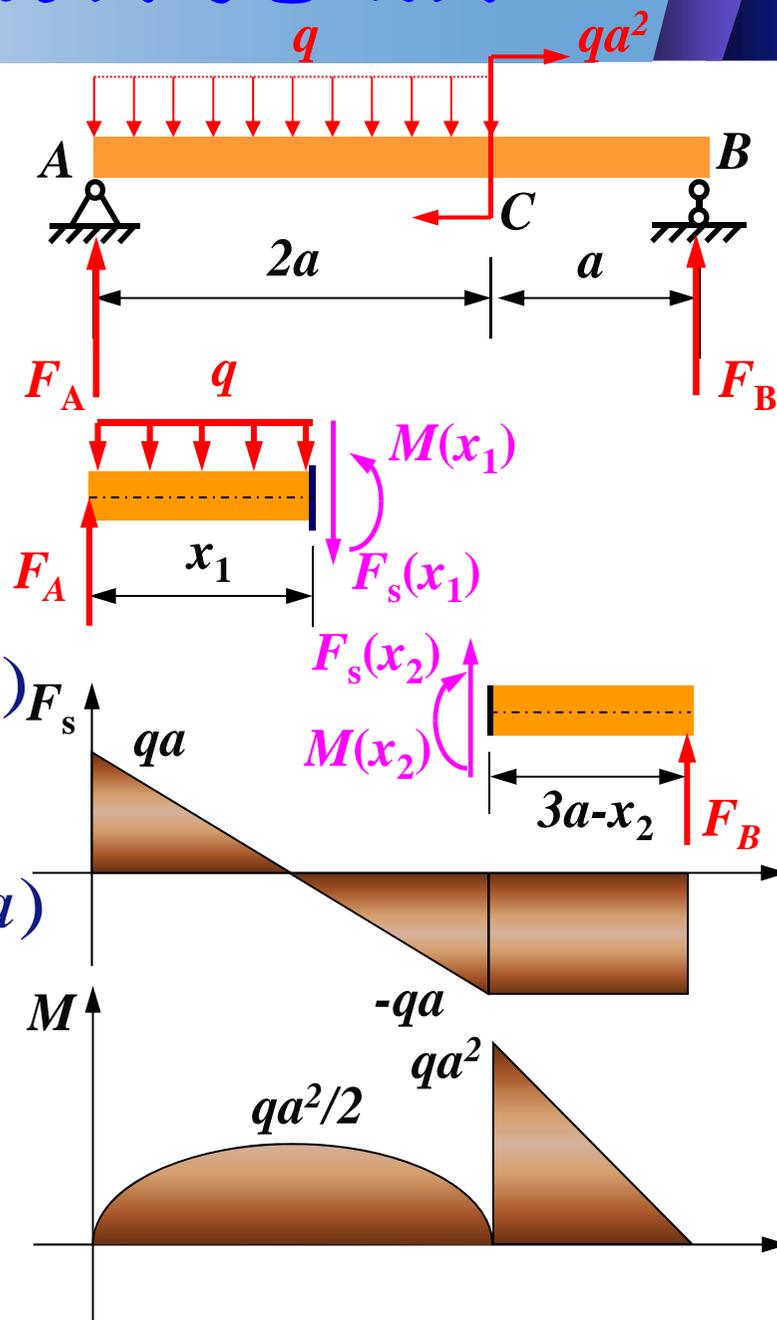
$$M(x_1) = qax_1 - \frac{q}{2}x_1^2 \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

$$F_s(x_2) = -F_B = -qa \quad (2a \leq x_2 \leq 3a)$$

$$M(x_2) = F_B x_2 = qa(3a - x_2)$$

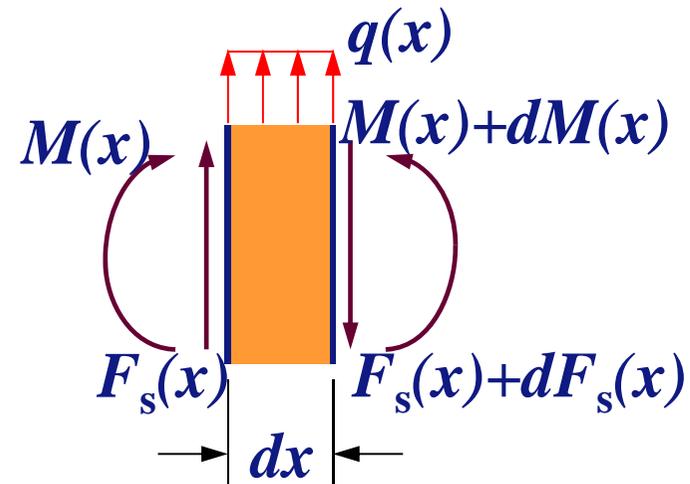
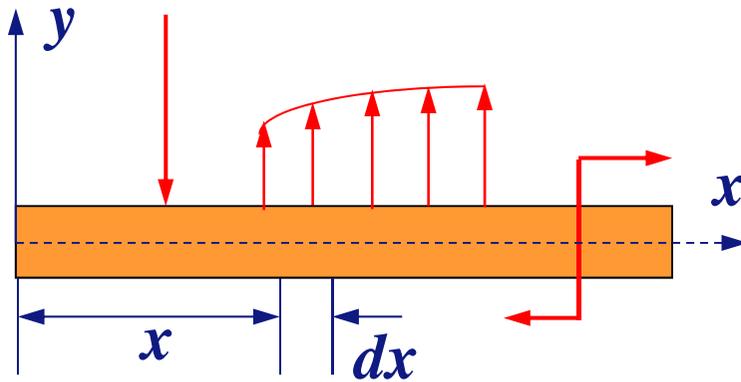
(3) 作 $F_s$ 、 $M$ 图

$$|F_s|_{\max} = qa \quad |M|_{\max} = qa^2$$



## 4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

### 一、微分关系



$$F_s(x) + dF_s(x) = F_s(x) + q(x)dx$$

$$M(x) + dM(x) = M(x) + F_s(x)dx + q(x)dx \frac{dx}{2}$$

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

## 4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

### 二、积分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$dF_s(x) = q(x)dx$$

$$dM(x) = F_s(x)dx$$

$$\int_{F_{s1}}^{F_{s2}} dF_s(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$\int_{M_1}^{M_2} dM(x) = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$$

$$F_{s2} - F_{s1} = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$$

# 上节课内容回顾

□ 弯曲内力：弯矩和剪力

□ 符号规则：

剪力  $F_s$ ：  
截面外法线顺时针转90度后  
与剪力方向一致时，该剪力  
为正；反之为负。

弯矩  $M$ ：  
使分离体弯曲成凹面向上的  
弯矩为正；使分离体弯曲成  
凹面向下的弯矩为负。

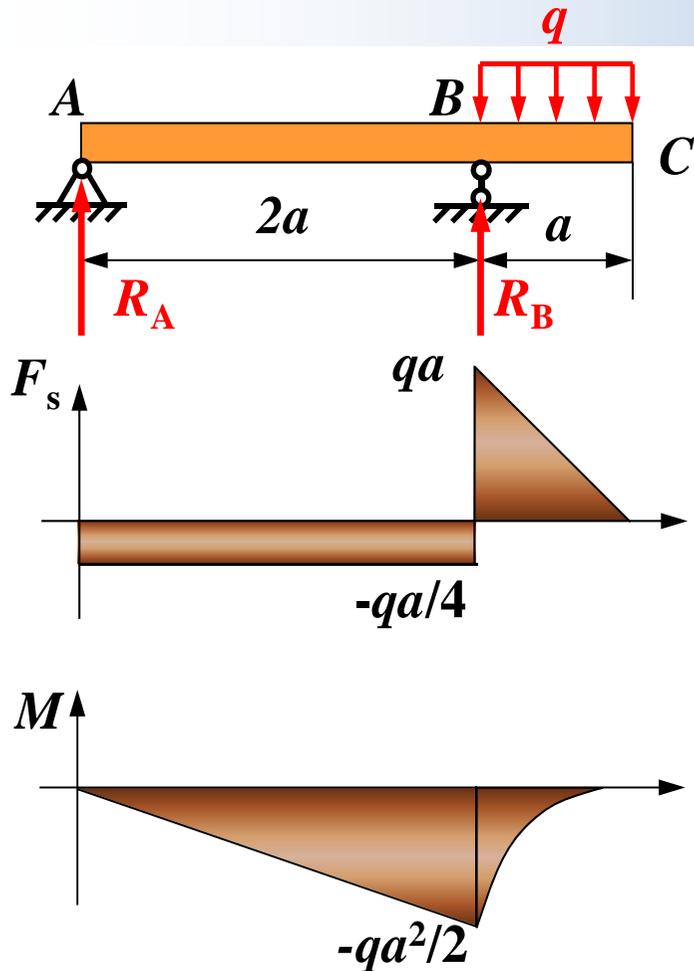
□ 利用截面法作弯曲内力图（设正法）

□ 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$F_{s2} - F_{s1} = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx \quad M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x) dx$$

## 4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



(4) 最大值:

$$\left| F_s \right|_{\max} = qa \quad \left| M \right|_{\max} = qa^2/2$$

例 作下梁的剪力弯矩图。

解: (1) 支反力:

$$R_A = -\frac{qa^2}{2 \times 2a} = -\frac{qa}{4}$$

$$R_B = qa - R_A = \frac{5qa}{4}$$

(2) 剪力图 (线型、数值):

AB段水平线, BC段下斜直线, 斜率为 $-q$ , A、B处突跳。

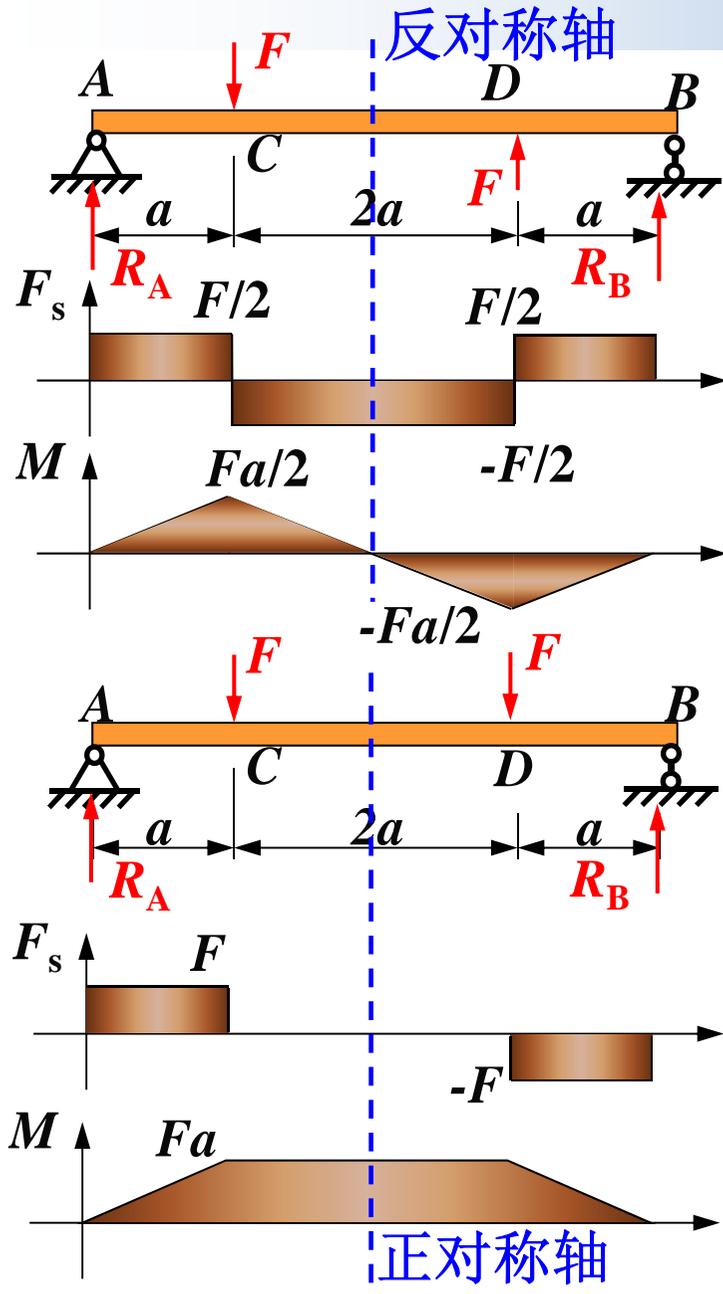
(3) 弯矩图 (线型、数值):

AB段下斜直线, 斜率为 $-qa/4$ , BC段上凸抛物线, 无突跳。

$$M_B = -\frac{qa}{4} \times 2a = -\frac{qa^2}{2}$$

(斜率或面积)

## 4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例 作下梁的剪力弯矩图。

解: (1) 求支反力:  $R_A = -R_B = F/2$

(2) 作剪力图、弯矩图:

(3) 最大值:

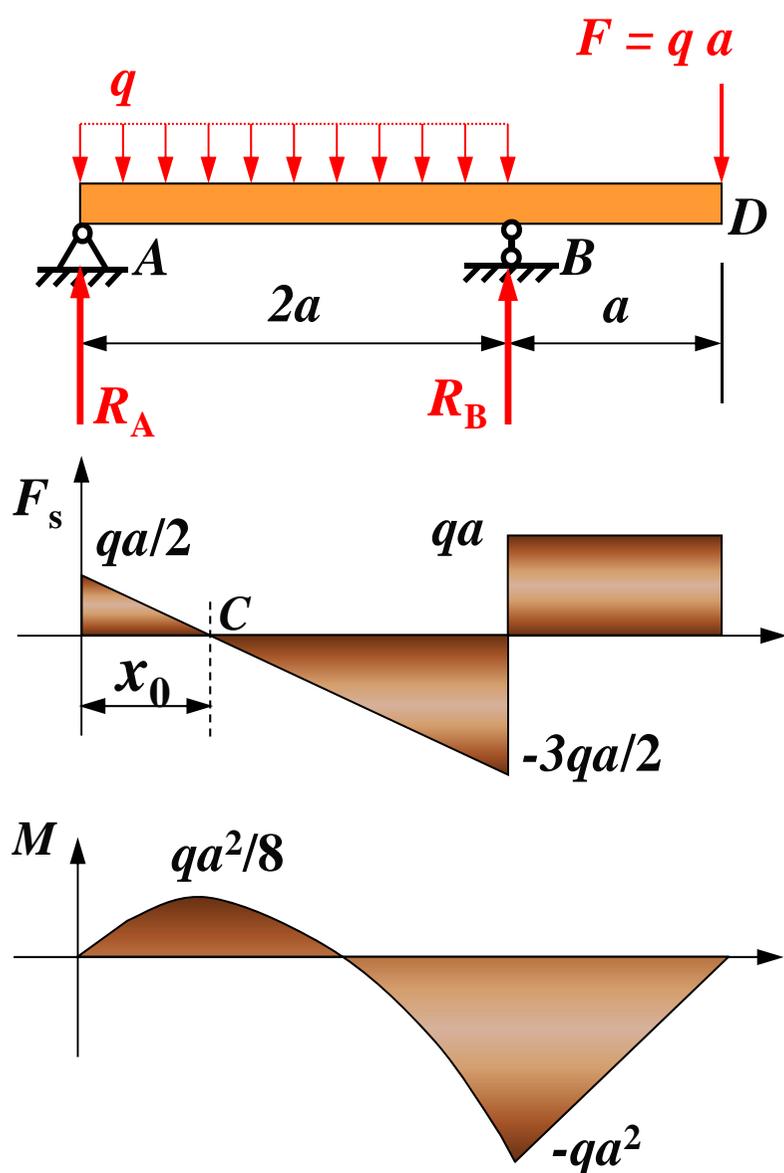
$$|F_s|_{\max} = F/2 \quad |M|_{\max} = Fa/2$$

(4) 若将D点的载荷反向

(5) 特点:

- 对称结构受正对称载荷时, 剪力图反对称, 弯矩图正对称;
- 对称结构受反对称载荷时, 剪力图正对称, 弯矩图反对称;
- 反对称轴通过的截面弯矩为零, 正对称轴通过的截面剪力为零。

## 4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例 作下梁的剪力弯矩图。

解: (1) 求支反力:

$$R_A = qa/2 \quad R_B = 5qa/2$$

(2) 作剪力图、弯矩图:

$$F_{sA} = R_A = \frac{qa}{2}$$

$$F_{sB}^- = F_{sA} + (-q) \times 2a = -\frac{3qa}{2}$$

$$F_{sB}^+ = F_{sB}^- + R_B = qa$$

$$F_{sC} = 0: x_0 = a/2$$

$$M_C = \frac{1}{2} \times \frac{qa}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{qa^2}{8} \quad \text{面积}$$

$$M_B = \frac{qa^2}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{3qa}{2} \times \frac{3a}{2} = -qa^2 \quad \text{面积}$$

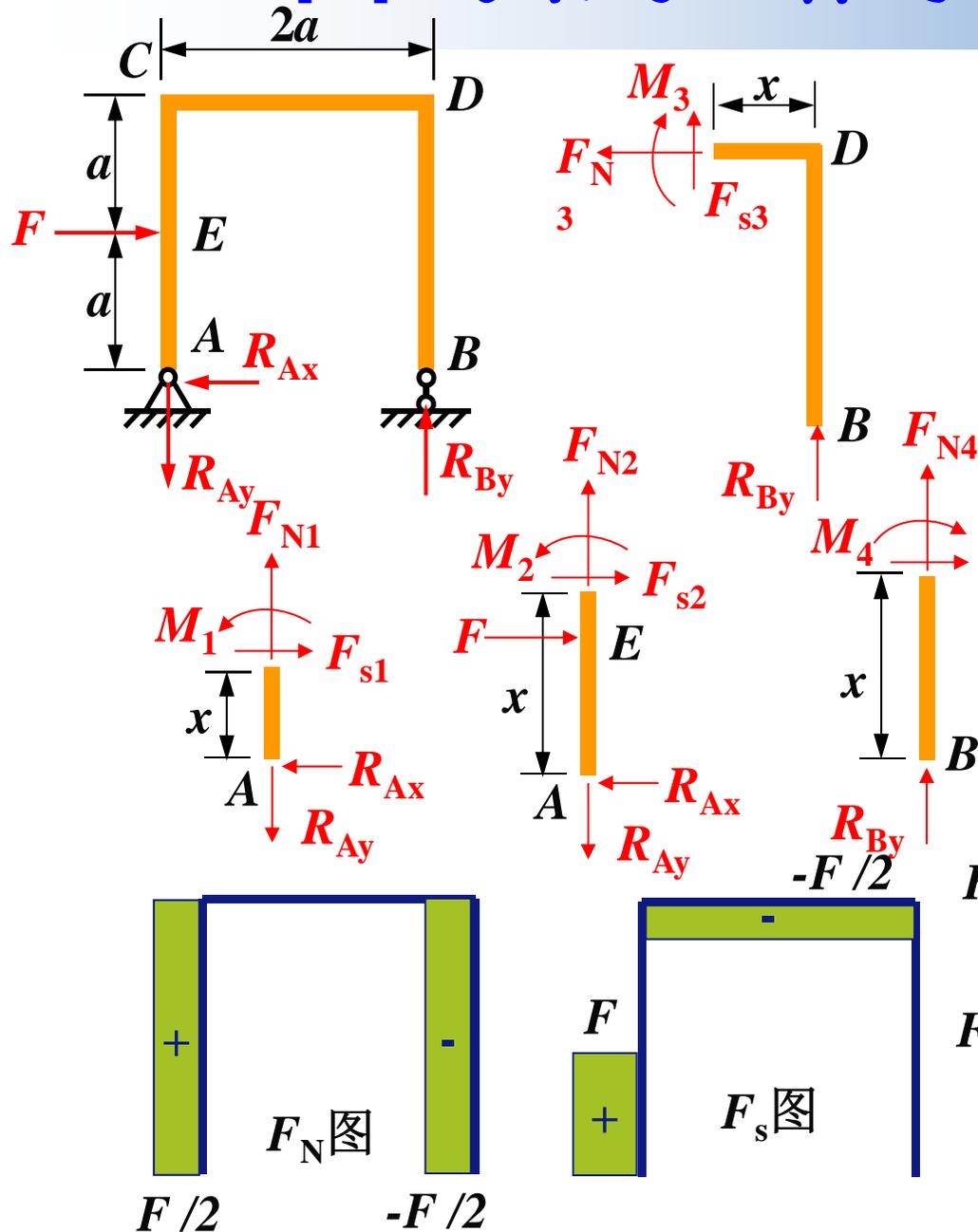
(3) 最大值:

$$|F_s|_{\max} = 3qa/2 \quad |M|_{\max} = qa^2$$

## 4-4 刚架与曲杆的弯曲内力

- 轴线为平面折线或平面曲线的杆件称为刚架和曲杆；
- 刚架和曲杆中的内力通常有：弯矩 $M$ 、剪力 $F_s$ 和轴力 $F_N$ ；
- 作刚架和曲杆内力图的步骤：求支反力，分力区，截面法求解；
- 刚架和曲杆内力的符号规则：
  - $M$ ：凹面向外为正；
  - $F_s$ ：截面外法线方向顺时针转90度后一致为正；
  - $F_N$ ：截面外法线方向一致为正；正的内力画在杆外侧，可以标出正负。

# 4-4 刚架与曲杆的弯曲内力



例 作刚架内力图。

解:  $R_{Ax} = F, R_{Ay} = R_{By} = F/2$

分力区作  $F_N$  图、 $F_s$  图、 $M$  图

$$F_{N1} = F/2, F_{s1} = F, M_1 = Fx$$

$$F_{N2} = F/2, F_{s2} = 0, M_2 = Fa$$

$$F_{N3} = 0, F_{s3} = -F/2, M_3 = Fx/2$$

$$F_{N4} = -F/2, F_{s4} = 0, M_4 = 0$$

$$Fa$$

$$|F_N|_{\max} = F/2$$

$$|F_s|_{\max} = F$$

$$|M|_{\max} = Fa$$

## 4-4 刚架与曲杆的弯曲内力

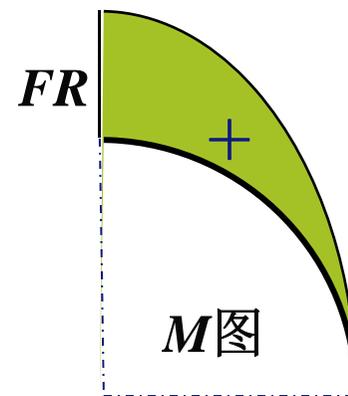
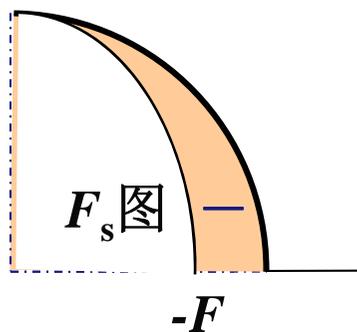
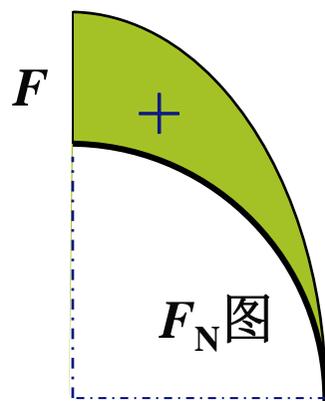
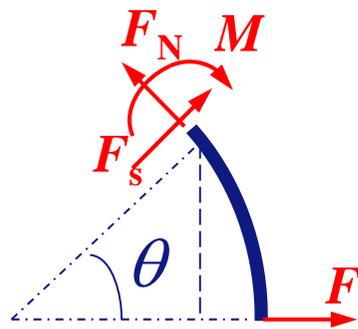
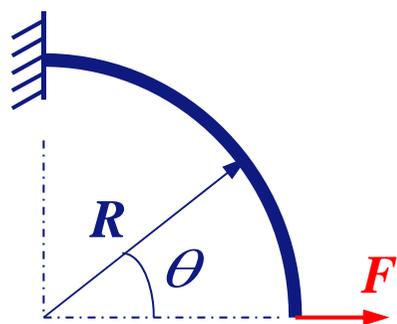
例 作曲杆内力图。

解：取分离体

$$F_N(\theta) = F \sin \theta$$

$$F_s(\theta) = -F \cos \theta$$

$$M(\theta) = FR \sin \theta$$



## 第四章的基本要求

1. 掌握梁上内力：剪力 $F_s$ 和弯矩 $M$ 的正负号规则；
2. 熟练掌握如何建立剪力、弯矩方程，如何绘制剪力图和弯矩图；
3. 深刻理解弯矩、剪力和线分布载荷集度三者之间的微分-积分关系，并利用微分-积分关系绘制或检查内力图（即剪力图、弯矩图）；
4. 掌握钢架和曲杆的内力图绘制方法。

# 第五章 弯曲应力

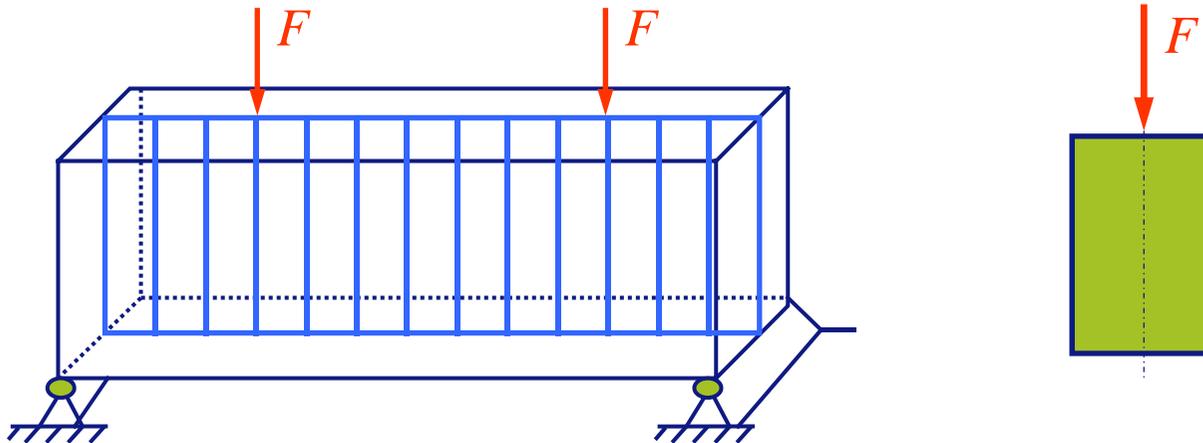
- ✓ 概述
- ✓ 弯曲正应力
- ✓ 弯曲正应力强度计算
- ✓ 弯曲切应力及其强度条件
- ✓ 提高弯曲强度的措施
- ✓ 剪切中心简介



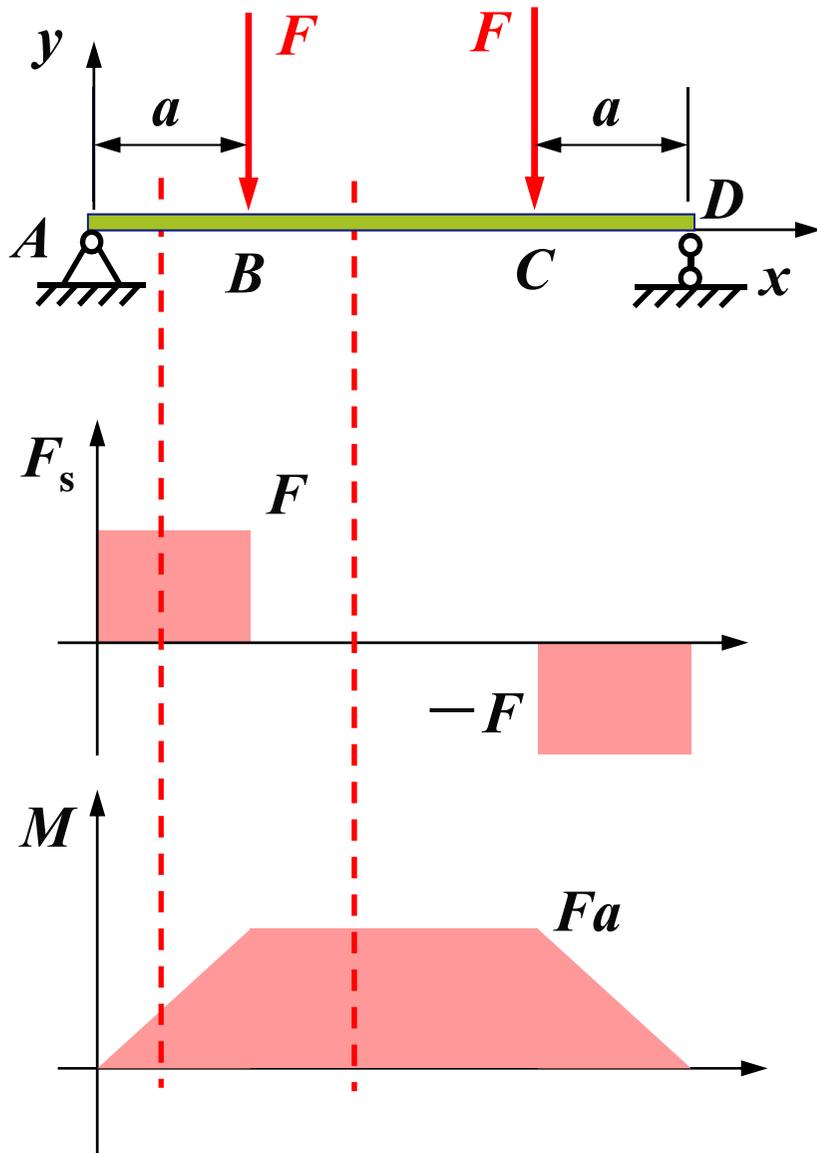
航天航空学院--力学中心

## 5-1 概述

- 本章研究范围：平面弯曲下的直梁
- 平面弯曲：梁的横截面具有纵向对称线，所有对称线组成纵向对称平面，外载荷作用在纵向对称平面内，梁的轴线在纵向对称平面内弯曲成一条平面曲线。



# 5-1 概述



● **AB(或CD) 段:**

$$F_s \neq 0, M \neq 0$$

剪切 (横力) 弯曲

● **BC段:**

$$F_s = 0, M \neq 0$$

纯弯曲

● 先研究纯弯曲时的应力, 再研究剪切弯曲时的应力。

## 5-2 弯曲正应力

### 一、变形观察

1. 横向线仍为直线,但相对转动  $d\theta$ ;
2. 纵向线由直线变成曲线, 有些伸长, 有些缩短;
3. 纵向线与横向线仍然互相垂直。

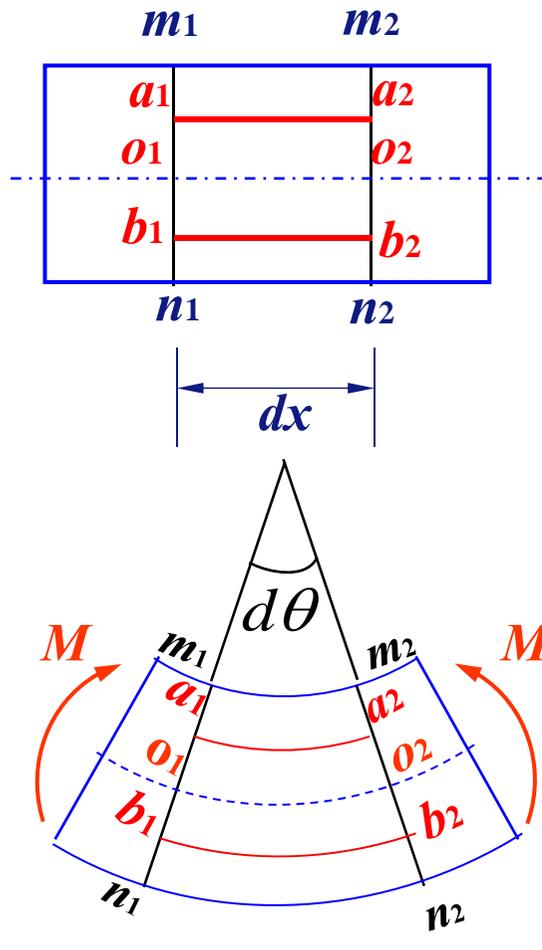
### 二、平截面假设:

横截面在弯曲变形后仍然保持平面。

### 三、推理

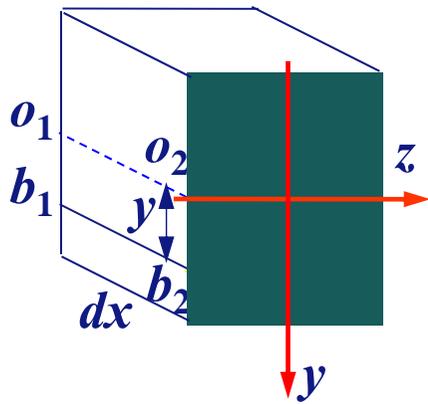
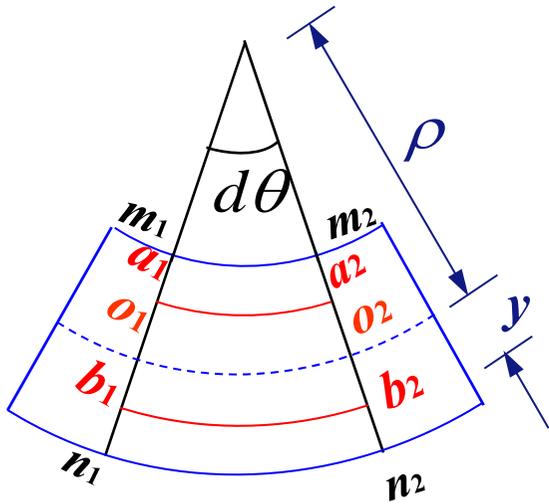
1. 横截面上无切应力;
2. 横截面上存在正应力;
3. 既不伸长又不缩短纤维层, 称为**中性层**。

中性层与横截面的交线, 称为**中性轴**, 用  $z$  轴表示。



## 5-2 弯曲正应力

### 四、正应力公式推导



#### 1、几何关系（看 $b_1b_2$ 的变化）

$$dx = b_1b_2 = o_1o_2 = \widehat{o_1o_2} = \rho d\theta$$

$$\widehat{b_1b_2} = (\rho + y) d\theta$$

$$\frac{\widehat{b_1b_2} - b_1b_2}{b_1b_2} = \varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\varepsilon = y/\rho$$

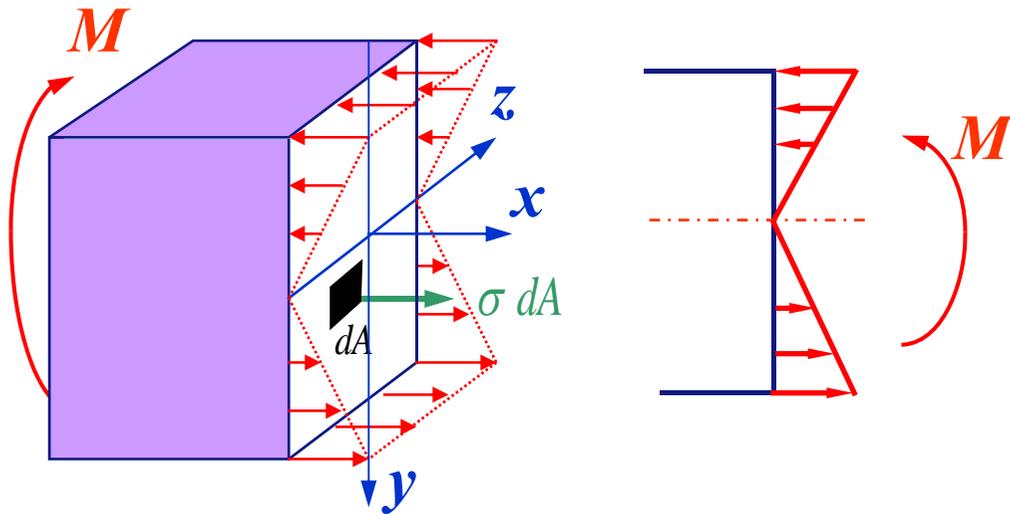
#### 2、物理关系：

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$$

问题：中性层（ $y$ 的起点）在哪里？  
 $\rho$ 怎样得到？

## 5-2 弯曲正应力

### 3、正应力分布规律：



$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$

横截面上的微内力组成一个与横截面垂直的空间平行力系，此力系可简化成三个内力分量。

$F_x$  —— 平行于  $x$  轴的轴力  
 $m_y$  —— 对  $y$  轴的力偶矩  
 $m_z$  —— 对  $z$  轴的力偶矩

其中：

$$\begin{cases} F_x = \int_A \sigma \cdot dA \\ m_y = \int_A z \cdot \sigma \cdot dA \\ m_z = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA \end{cases}$$

## 5-2 弯曲正应力

4、平衡条件:

$$1) \sum F_x = 0$$

$$\int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0$$

中性轴  $z$  通过截面形心。

$$2) \sum m_y = 0$$

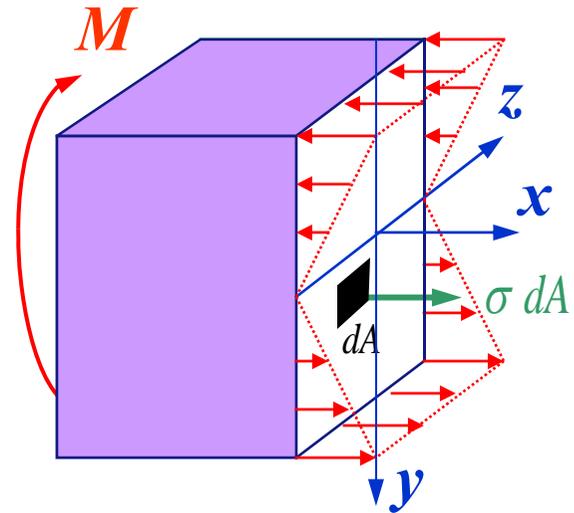
$$\int_A z \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A z y dA = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0$$

$yz$  轴为形心主惯性轴。

$$3) \sum m_z = M$$

$$\int_A y \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z = M$$

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

公式适用条件:

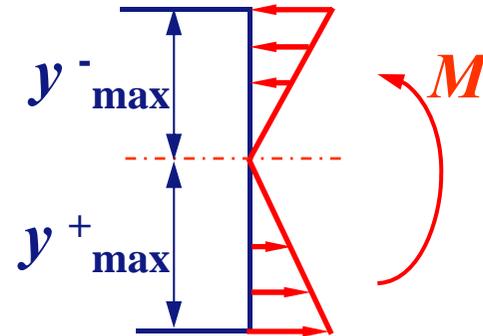
1. 在线弹性范围;
2. 材料  $E^+ = E^-$  ;
3. 纯弯曲与剪切弯曲;
4. 平面弯曲。

# 5-3 弯曲正应力强度计算

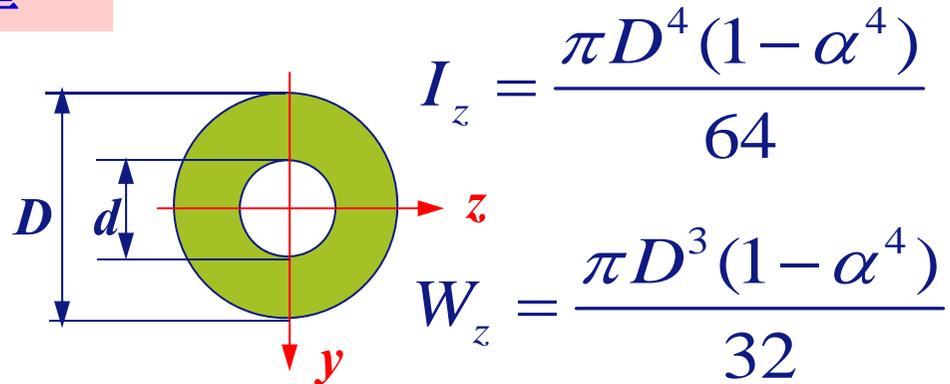
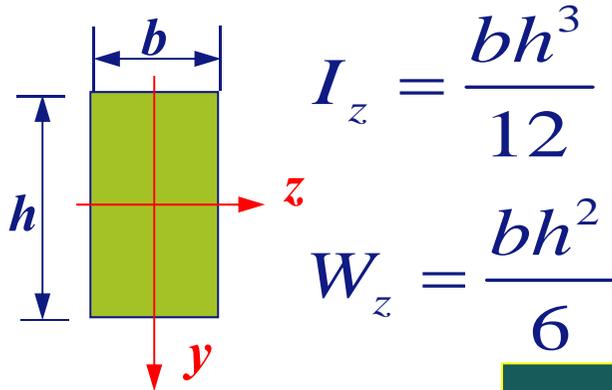
## 一、最大应力

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{I_z} y_{\max}^+ \quad W_z^+ = I_z / y_{\max}^+$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M}{I_z} y_{\max}^- \quad W_z^- = I_z / y_{\max}^-$$



$W_z^+, W_z^-$  抗弯截面模量



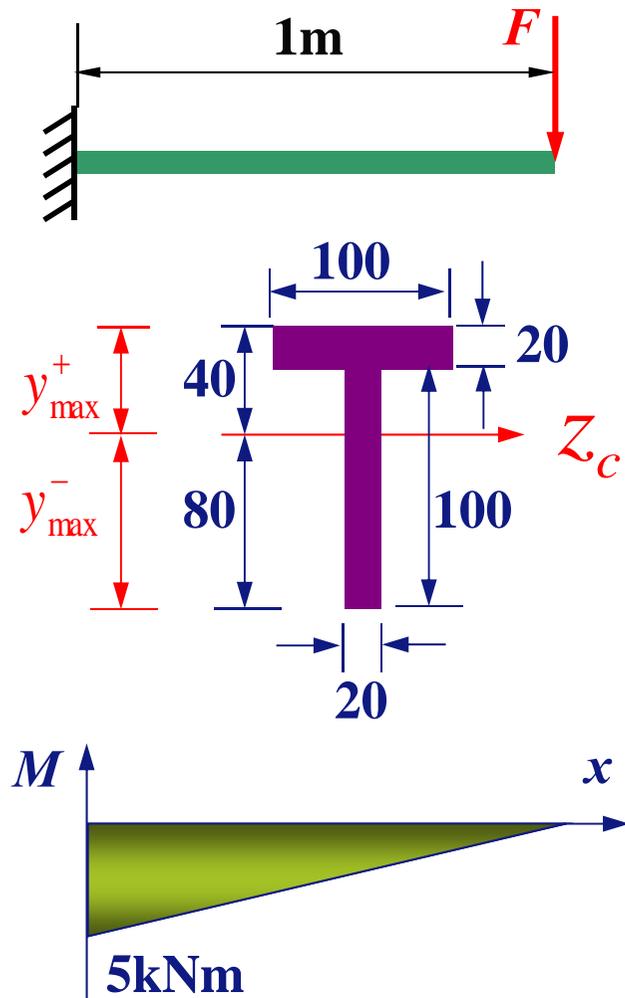
## 二、弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{W_z^+} \leq [\sigma^+]$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M}{W_z^-} \leq [\sigma^-]$$

## 5-3 弯曲正应力强度计算

例 图示悬臂梁,  $F = 5\text{kN}$ ,  $[\sigma^+] = 40\text{MPa}$ ,  $[\sigma^-] = 90\text{MPa}$   
试校核该梁的正应力强度。



解:  $|M|_{\max} = 5\text{kNm}$      $I_{z_c} = 533\text{ cm}^4$

$$y_{\max}^+ = 40\text{mm}, \quad y_{\max}^- = 80\text{mm}$$

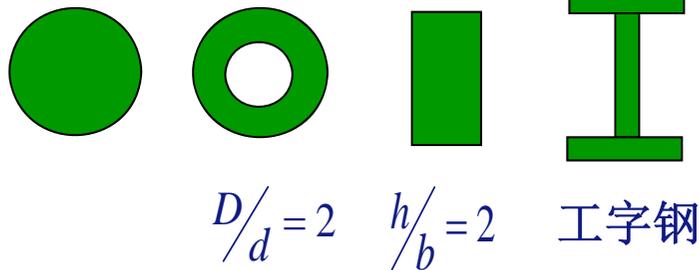
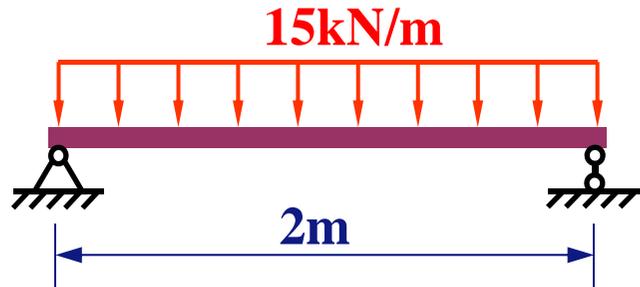
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{W_z^+} = \frac{5 \times 10^6}{533 \times 10^4} \times 40 = 37.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M}{W_z^-} = \frac{5 \times 10^6}{533 \times 10^4} \times 80 = 75\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max}^+ \leq [\sigma^+] \quad \sigma_{\max}^- \leq [\sigma^-] \quad \text{构件安全!}$$

讨论: 若将截面倒置, 结果如何?

## 5-3 弯曲正应力强度计算



$$A_1 = 48\text{cm}^2 \quad A_2 = 37.6\text{cm}^2$$

$$A_3 = 34\text{cm}^2 \quad A_4 = 14\text{cm}^2$$

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \\ = 3.43 : 2.69 : 2.43 : 1$$

例 已知简支梁的  $[\sigma] = 160\text{MPa}$   
求：按正应力强度条件选择下列截面的尺寸，并比较其重量。

解：  $|M|_{\max} = 7.5\text{kNm}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]$$

1、圆形

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \times 32}{[\sigma] \pi}} = 78.2\text{mm}$$

2、圆环

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \times 32}{[\sigma] \pi \times (1 - 0.5^4)}} = 79.9\text{mm}$$

3、矩形

$$b = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \times 6}{[\sigma] \times 4}} = 41.3\text{mm}$$

4、工字钢

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = 46.9\text{cm}^3$$

取 No.10 工字钢  $W_z = 49\text{cm}^3$

## 5-3 弯曲正应力强度计算

解: 1. 求约束力  $F_A=3q/4$ ,  $F_B=9q/4$

2. 按梁的弯曲正应力强度条件求解

$$|M|_{\max} = q/2 \quad \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{q/2}{W_z} \leq [\sigma]$$

查型钢表10号工字钢:  $W_z=49\text{cm}^3$

$$q \leq 2W_z[\sigma] = 2 \times 49 \times 160 = 15.68 \text{ kN/m}$$

3. 按杆的拉伸正应力强度条件求解

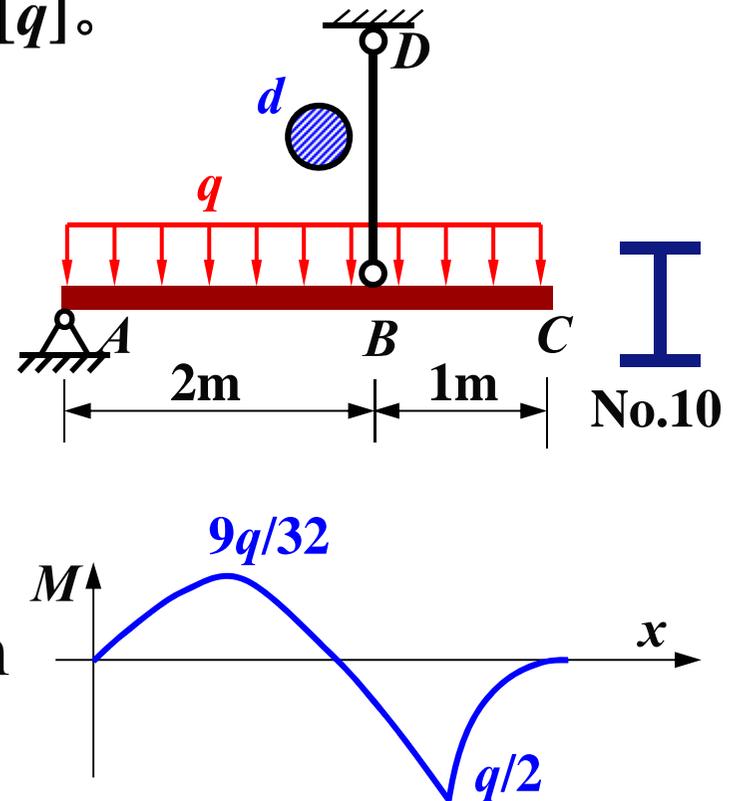
$$F_N^{BD} = F_B = 9q/4$$

$$\sigma = \frac{F_N^{BD}}{A} = \frac{9q/4}{\pi d^2/4} \leq [\sigma]$$

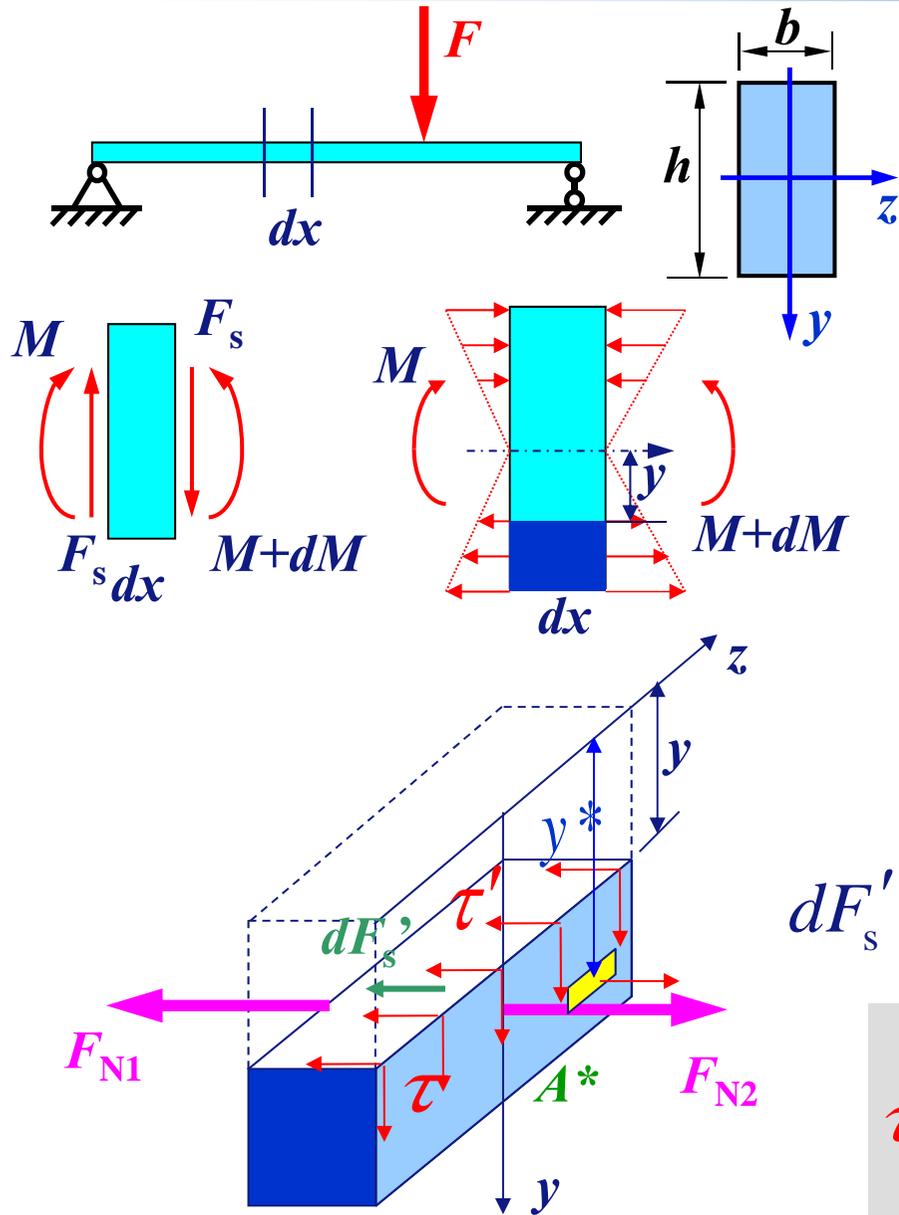
$$q \leq \frac{\pi d^2 [\sigma]}{9} = \frac{\pi \times 15^2 \times 160}{9} = 12.57 \text{ kN/m}$$

$$[q] = 12.57 \text{ kN/m}$$

例 AC为10号工字钢梁, B处用直径 $d=15\text{mm}$ 的圆截面杆悬吊, 梁与杆许用应力为 $[\sigma]=160\text{MPa}$ , 按正应力强度求结构的许可载荷 $[q]$ 。



# 5-4 弯曲切应力及其强度条件



一、矩形截面梁： $b \ll h$

假设所有的  $\tau$  都平行于  $y$

假设同一高度  $y$  处  $\tau$  相等

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} = dF'_s$$

$$F_{N2} = \int_{A^*} \sigma dA = \int_{A^*} \frac{M + dM}{I_z} y^* dA$$

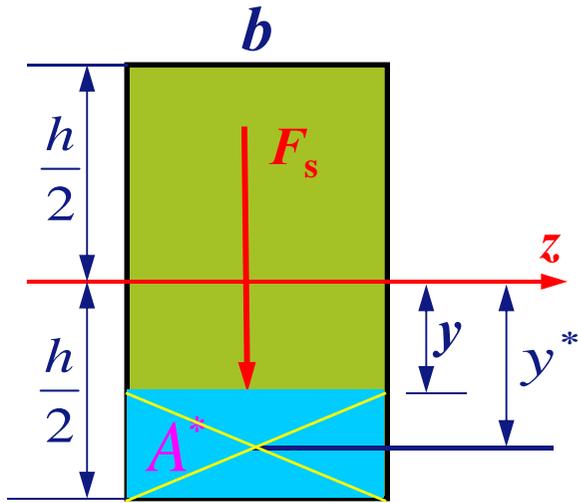
$$= \frac{M + dM}{I_z} S_z^* \quad F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$dF'_s = \tau' b dx \quad \tau' = \frac{dM}{dx} \frac{S_z^*}{b I_z} \quad \tau' = \tau$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$$

理解  $S_z^*$  的含义!

## 5-4 弯曲切应力及其强度条件



$$S_z^* = A^* y^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{\frac{h}{2} + y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau = \frac{F_s \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{6F_s}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = \pm h/2: \tau = 0$$

$$y = 0: \tau = \tau_{\max} = \frac{3F_s}{2bh} = \frac{3F_s}{2A}$$

## 5-4 弯曲切应力及其强度条件

### 二、其它形式截面梁：

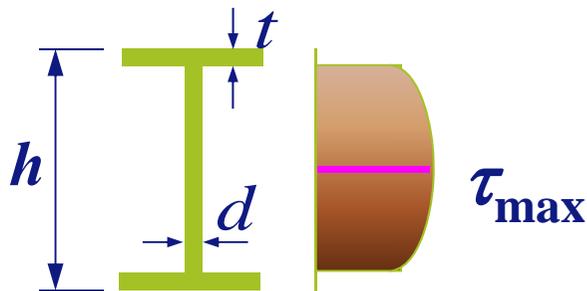
圆形截面梁：

$$\tau_{\max} = \frac{4F_s}{3A}$$

薄壁圆环截面：

$$\tau_{\max} = 2 \frac{F_s}{A}$$

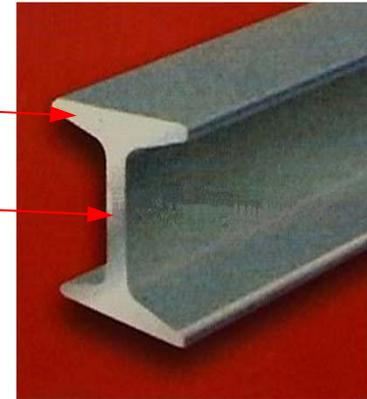
工字形截面：



$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_z^* \max}{d I_z} \approx \frac{F_s}{A_{\text{腹板}}} = \frac{F_s}{d(h-2t)}$$

翼缘

腹板



### 三、切应力强度条件

$$\tau_{\max} = k \frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$

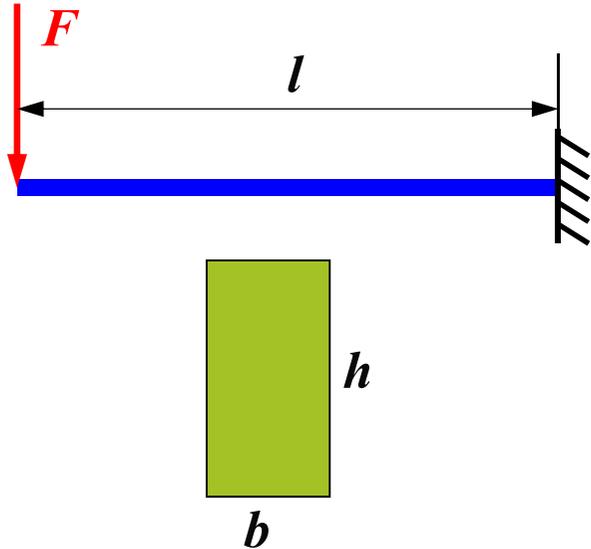
(1) 一般细长梁受弯曲变形，只校核正应力强度条件，切应力可以忽略；

(2) 其他受弯曲变形的构件，一般采用正应力强度条件进行设计，再采用切应力强度条件进行校核。

(3) 抗剪性能差的材料制成的受弯构件，采用切应力强度条件进行设计或校核。

## 5-4 弯曲切应力及其强度条件

例 比较矩形截面悬臂梁的最大正应力和最大切应力。



解:  $|M|_{\max} = Fl$ ,  $|F_s|_{\max} = F$

$$\sigma_{\max} = \frac{6Fl}{bh^2}, \quad \tau_{\max} = \frac{3F}{2bh}$$

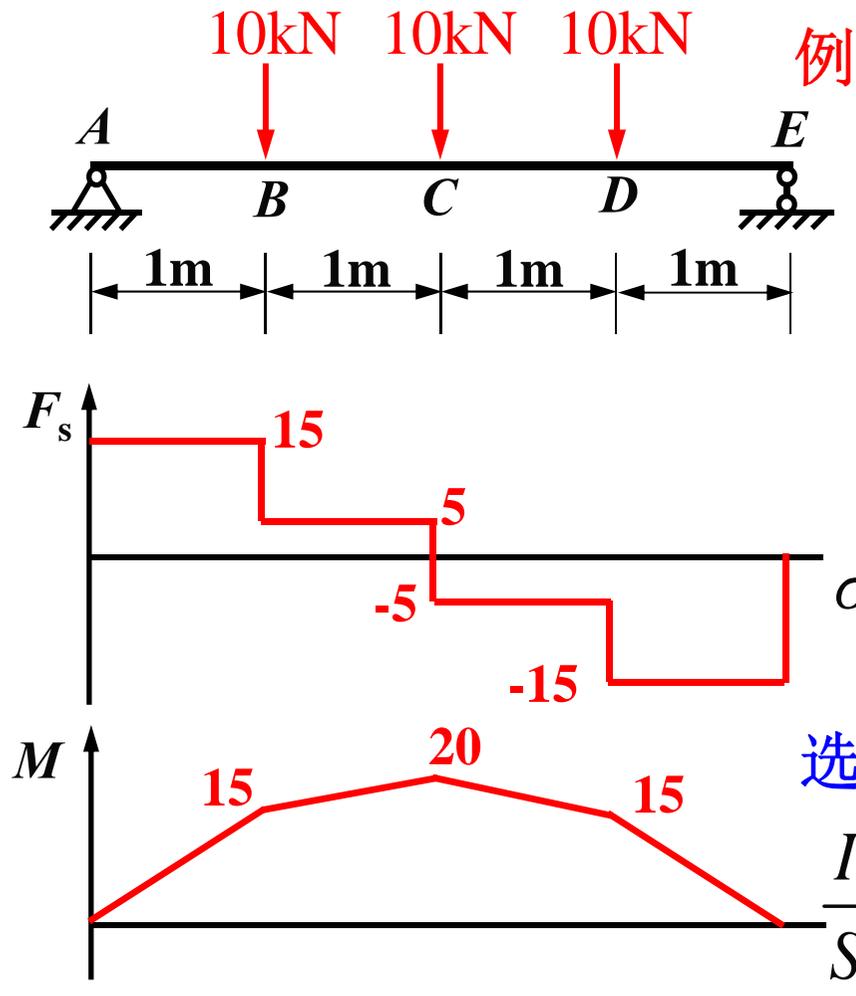
$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{4l}{h}$$

故: 对于一般细长梁切应力可以忽略不计。

但以下一些梁, 切应力不能忽略:

- 木梁、焊接梁、粘接梁;
- 粗短梁;
- 有较大集中力作用在支座附近。

## 5-4 弯曲切应力及其强度条件



$[\sigma] = 160\text{MPa}$ ,  $[\tau] = 40\text{MPa}$ ,  
试选择工字钢型号。

解: 1、作内力图

$$|M|_{\max} = 20\text{kNm}, \quad |F_s|_{\max} = 15\text{kN}$$

2、强度计算

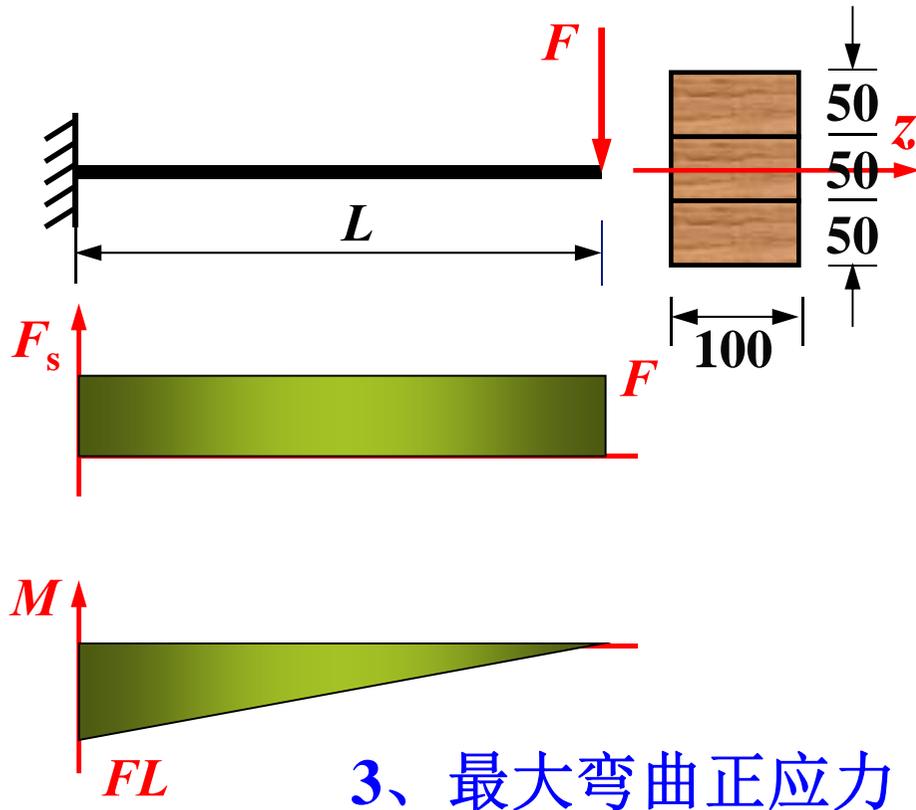
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = 125\text{cm}^3$$

选No.16工字钢:  $W_z = 141\text{cm}^3$   $d = 6\text{mm}$

$$\frac{I_z}{S_z} = 13.8\text{cm} \quad h = 160\text{mm} \quad t = 9.9\text{mm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{s\max} S_z}{d I_z} = 18.1\text{MPa} < [\tau] \quad \text{或} \quad \tau_{\max} = \frac{F_{s\max}}{d (h - 2t)} = 17.8\text{MPa} < [\tau]$$

## 5-4 弯曲切应力及其强度条件



例  $L=1\text{m}$ 的胶合板，胶面上的  $[\tau]=3.4\text{MPa}$ ，求： $[F]$ ， $\sigma_{\max}$ 。

解：1、作内力图

$$|F_s|_{\max} = F, |M|_{\max} = FL$$

2、弯曲切应力

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z} \leq [\tau]$$

$$S_z^* = 100 \times 50 \times 50 = 2.5 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 2.81 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$[F] = \frac{b I_z [\tau]}{S_z^*} = 38.2 \text{ kN}$$

3、最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = 102 \text{ MPa}$$

## 5-5 提高弯曲强度的途径

● **目的:** 保证静强度的前提下, 尽可能地节省材料

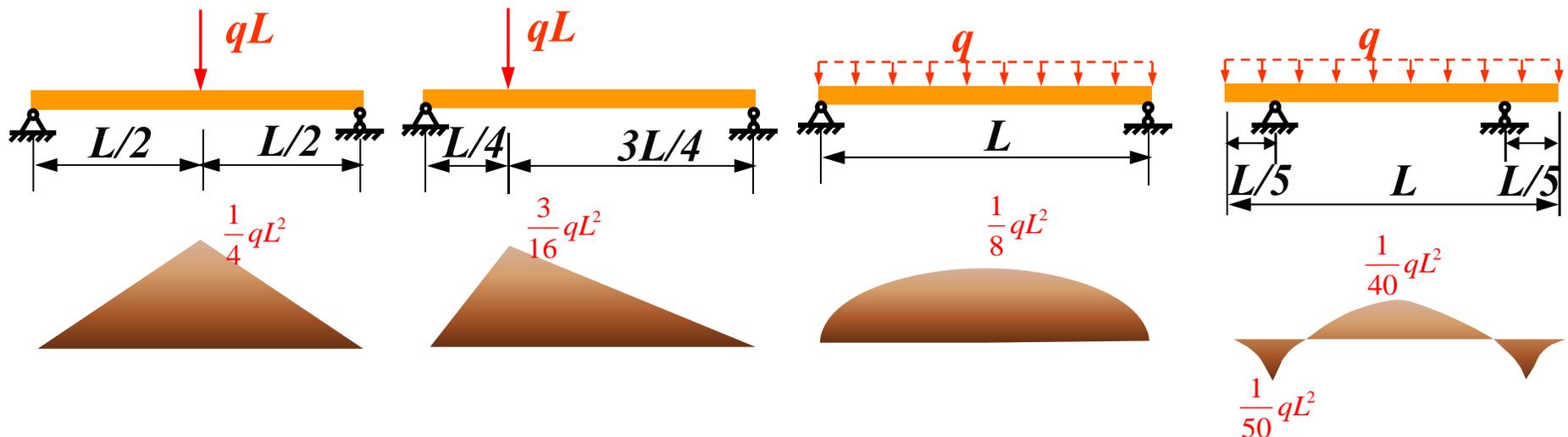
● **思路:** 重点考虑正应力的强度  $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]$

● **措施:** 一、支承和载荷的合理安排, 使 $M$ 减小;

● 支承点不要设在梁的两端;

● 集中力尽量作用在支座附近;

● 将集中载荷分解为多个小载荷或分布载荷。



## 5-5 提高弯曲强度的途径

二、截面形状的合理设计，使  $W/A$  增大；

● 截面形状：

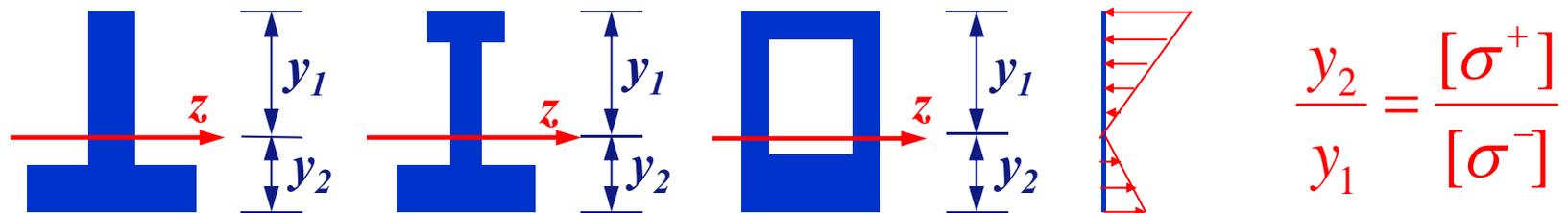


● 若使用塑性材料：

$[\sigma^+] = [\sigma^-]$ ，宜采用上下对称的截面；

● 若使用脆性材料：

$[\sigma^+] < [\sigma^-]$ ，宜采用上下不对称的截面；



## 5-5 提高弯曲强度的途径

### 三、等强度梁的使用

- 当梁发生剪切弯曲时， $M$ 随截面位置而变化，若采用等截面梁，即抗弯截面模量 $W_z$ 为常数，此时只有 $|M|_{\max}$ 位置的横截面上应力达到许用应力 $[\sigma]$ ，而其它截面上应力均小于许用应力 $[\sigma]$ 。**不科学！**
- 可以采用变截面梁，即 $W_z$ 随截面位置而变化：弯矩 $M$ 大时，抗弯截面模量 $W_z$ 亦大；反之亦然。
- **等强度梁：**梁所有截面上的最大正应力均相等，都等于许用应力 $[\sigma]$ 。

$$\sigma(x) = \frac{|M(x)|}{W_z(x)} = [\sigma] \quad \longrightarrow \quad W_z(x) = \frac{|M(x)|}{[\sigma]}$$

## 第五章的基本要求

1. 明确平面弯曲、纯弯曲和剪切弯曲的概念；
2. 了解梁弯曲正应力和切应力计算公式的推导过程，明确中性轴，中性层等概念；
3. 熟练掌握梁弯曲正应力的计算，建立弯曲正应力强度条件，并利用强度条件进行有关计算；
4. 掌握矩形截面、其它常见截面梁切应力的计算及切应力在横截面上的分布规律，掌握如何建立相应的强度条件；
5. 了解提高梁强度的一些主要措施。

# 第六章 弯曲变形

- 概述
- 直接积分法
- 查表叠加法
- 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施
- 变形比较法求解超静定梁

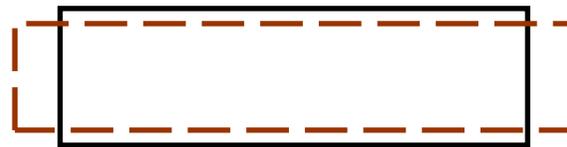


航天航空学院--力学中心

# 6-1 概述

拉压变形

$$\Delta l = \frac{F_N L}{EA}$$

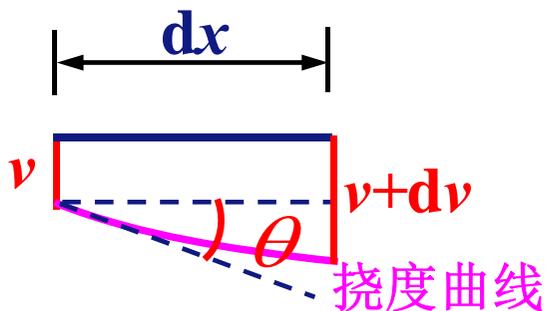


扭转变形

$$\varphi = \frac{TL}{GI_p}$$



弯曲变形



挠度  $v$ : 截面形心的竖向位移

转角  $\theta$ : 截面绕中性轴的转角

转角与挠度的关系:  $\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} = v'(x)$  (小变形条件下)

## 6-1 概述

纯弯曲正应力公式推导时得： $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$        $\frac{1}{\rho(x)}$  曲率  
 $EI_z$  抗弯刚度

由数学关系得： $\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \approx v''$        $\theta(x) \approx v'(x)$

进一步推导得：挠曲线近似微分方程

$$v''(x) = \theta'(x) = \frac{M(x)}{EI_z}$$

$v(x)$  挠度曲线方程

$\theta(x)$  转角方程

公式的适用条件：

- 1) 材料服从虎克定律；
- 2) 小变形；
- 3) 忽略剪力对挠度的影响。

## 6-2 直接积分法

- 对挠曲线近似微分方程进行积分：

$$\theta(x) = v'(x) = \int \frac{M(x)}{EI_z} dx + C \quad v(x) = \iint \frac{M(x)}{EI_z} dx dx + Cx + D$$

- 若为等直梁：

$$EI_z \theta(x) = \int M(x) dx + C$$

$$EI_z v(x) = \iint M(x) dx dx + Cx + D$$

其中， $C$ 、 $D$ 为积分常数，由边界条件确定。

简支端的边界条件



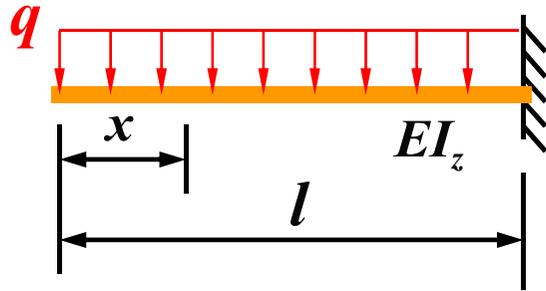
$$\begin{cases} x = 0 & v = 0 \\ x = l & v = 0 \end{cases}$$

悬臂端的边界条件



$$\begin{cases} x = 0 & v = 0 \\ x = 0 & \theta = 0 \end{cases}$$

## 6-2 直接积分法



例 已知:  $q$ 、 $EI_z$ 、 $l$

求挠曲线方程及最大挠度和转角。

解: 弯矩方程  $M(x) = -\frac{q}{2}x^2$

$$EI_z \theta(x) = -\int \frac{q}{2} x^2 dx + C = -\frac{qx^3}{6} + C$$

$$EI_z v(x) = \int -\frac{q}{6} x^3 dx + Cx + D = -\frac{qx^4}{24} + Cx + D$$

边界条件:

$$x = l : v = 0, \theta = 0$$

$$\theta(x) = \frac{q}{6EI_z} (l^3 - x^3)$$

$$|v|_{\max} = \frac{ql^4}{8EI_z} (\downarrow)$$

$$C = \frac{ql^3}{6} \quad D = -\frac{ql^4}{8}$$

$$v(x) = \frac{-q}{24EI_z} (3l^4 - 4l^3x + x^4)$$

$$|\theta|_{\max} = \frac{ql^3}{6EI_z} (\curvearrowright)$$

## 6-2 直接积分法

例 已知:  $F$ 、 $EI_z$ 、 $a$ 、 $b$ ;  
求挠曲线方程及最大挠度和转角。

解:  $R_A = Fb/l$   $R_B = Fa/l$

$$M_1(x) = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

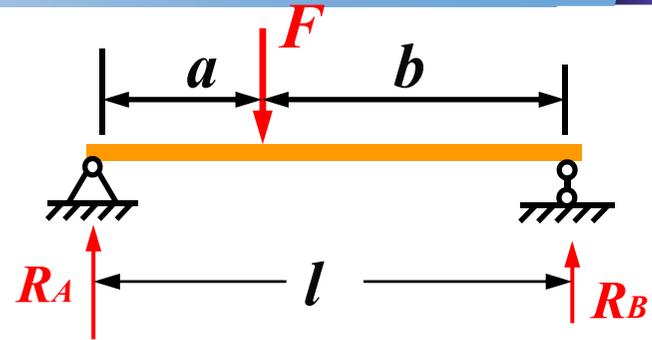
$$M_2(x) = \frac{Fb}{l}x - F(x-a) \quad (a \leq x \leq l)$$

$$EI_z \theta_1 = \frac{Fb}{2l}x^2 + C_1$$

$$EI_z \theta_2 = \frac{Fb}{2l}x^2 - \frac{F}{2}(x-a)^2 + C_2$$

$$EI_z v_1 = \frac{Fb}{6l}x^3 + C_1x + D_1$$

$$EI_z v_2 = \frac{Fb}{6l}x^3 - \frac{F}{6}(x-a)^3 + C_2x + D_2$$



边界条件:

$$x=0: v_1=0, \quad x=l: v_2=0$$

连续条件:

$$x=a: \theta_1 = \theta_2, \quad v_1 = v_2$$

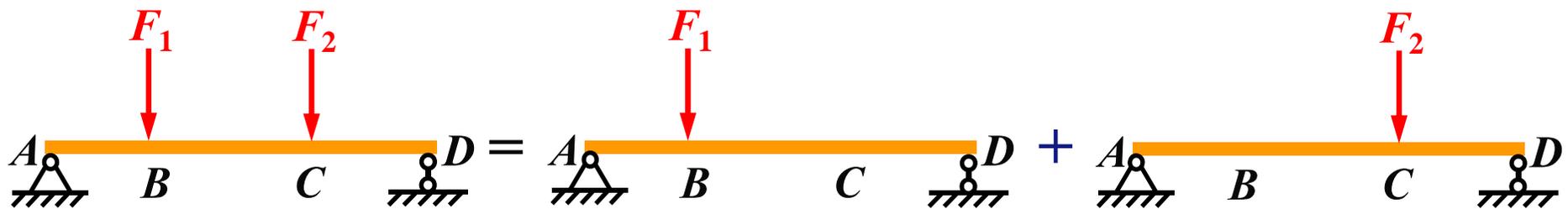
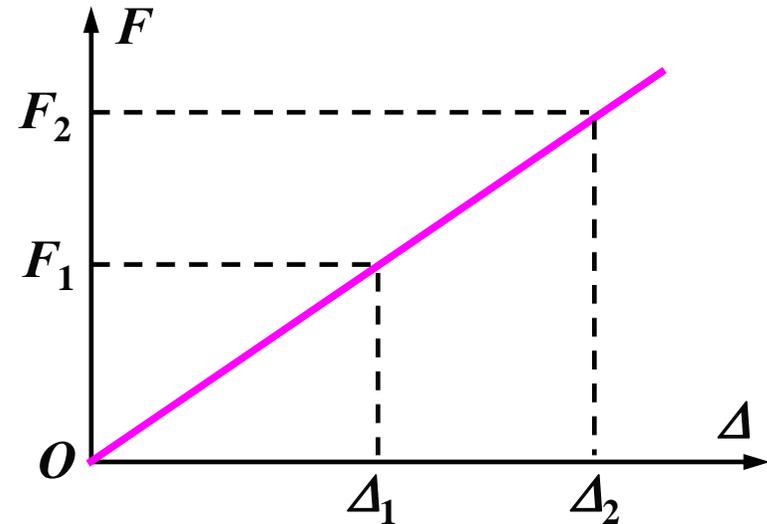
得:  $D_1 = D_2 = 0$

$$C_1 = C_2 = \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

继续.....

## 6-3 查表叠加法

- 变形是载荷的**线性函数**；
- 当梁上有多个载荷同时作用时，总的变形等于每个载荷单独作用时变形之和，此方法称为**叠加法**。



- 为提高效率，可以将几类梁在几种常见载荷作用下引起的转角、挠度以及挠曲线方程等，事先求出，列成表格（附录B），以供查用。

## 6-3 查表叠加法

例 求下梁C截面的挠度和A截面的转角。

解:

$$v_{C1} = \frac{5q(2a)^4}{384EI_z} = \frac{5qa^4}{24EI_z} (\downarrow)$$

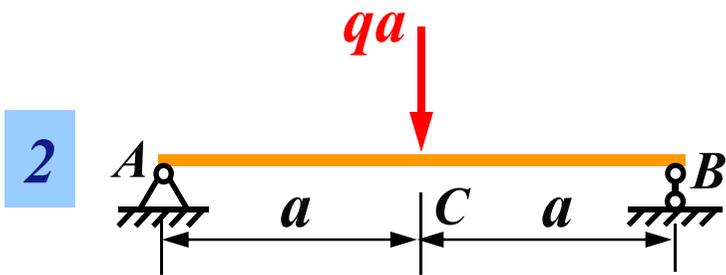
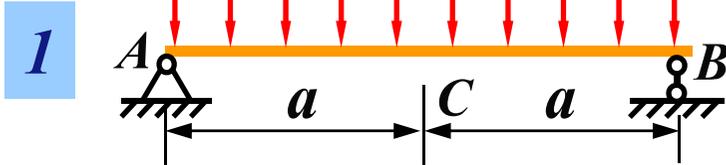
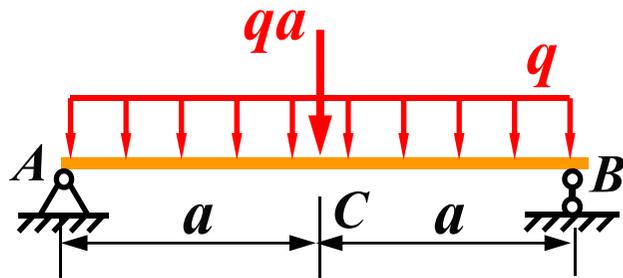
$$v_{C2} = \frac{qa(2a)^3}{48EI_z} = \frac{qa^4}{6EI_z} (\downarrow)$$

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} = \frac{3qa^4}{8EI_z} (\downarrow)$$

$$\theta_{A1} = \frac{q(2a)^3}{24EI_z} = \frac{qa^3}{3EI_z} (\downarrow)$$

$$\theta_{A2} = \frac{qa(2a)^2}{16EI_z} = \frac{qa^3}{4EI_z} (\downarrow)$$

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{7qa^3}{12EI_z} (\downarrow)$$



## 6-3 查表叠加法

例 求C截面的挠度和A截面的转角。

解:

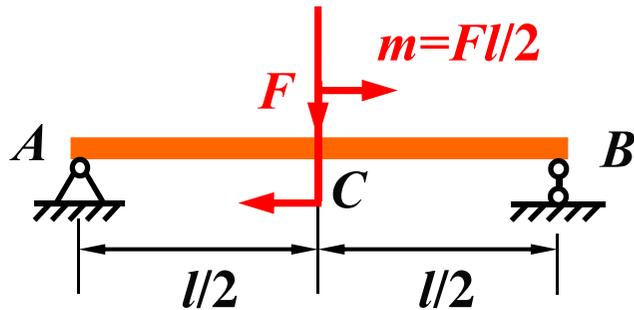
$$\begin{aligned} v_C &= v_C(F) + v_C(m) \\ &= v_C(F) = \frac{Fl^3}{48EI_z} (\downarrow) \end{aligned}$$

$$\theta_A(F) = \frac{Fl^2}{16EI_z} (\downarrow)$$

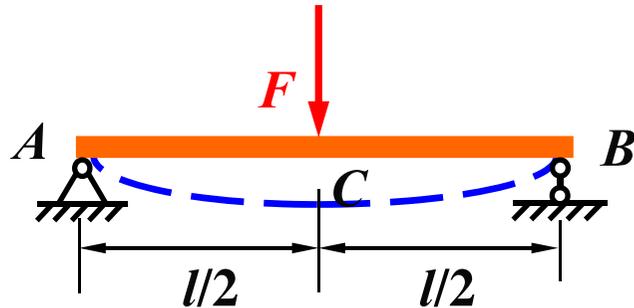
$$\theta_A(m) = \frac{Fl^2}{48EI_z} (\uparrow)$$

$$\theta_A = \theta_A(F) + \theta_A(m)$$

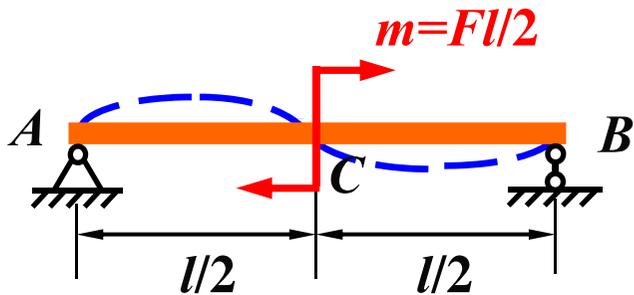
$$= \frac{Fl^2}{EI_z} \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{48} \right) = \frac{Fl^2}{24EI_z} (\downarrow)$$



1



2



## 6-3 查表叠加法

例 求图示悬臂梁C点的挠度。

解法一：

$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

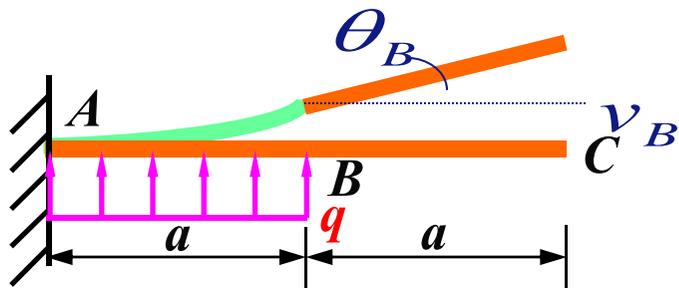
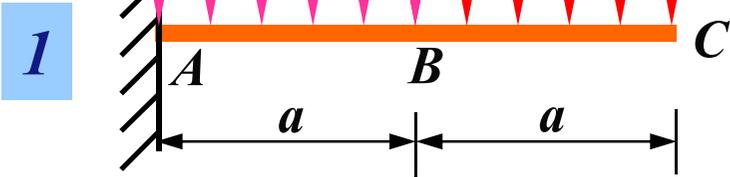
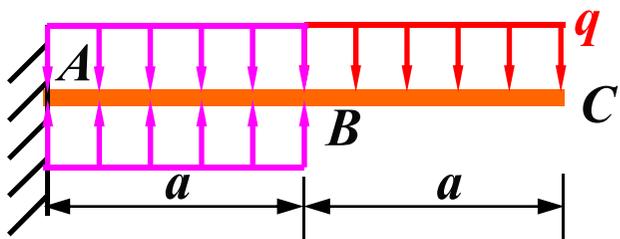
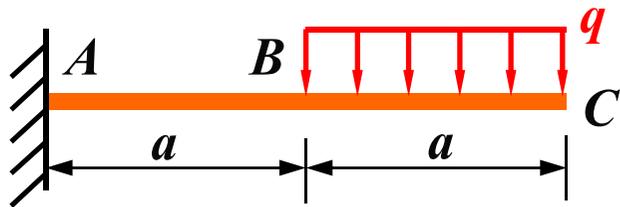
$$v_{C1} = \frac{q(2a)^4}{8EI_z} (\downarrow)$$

$$v_{C2} = v_{B2} + \theta_{B2}a = \frac{7qa^4}{24EI_z} (\uparrow)$$

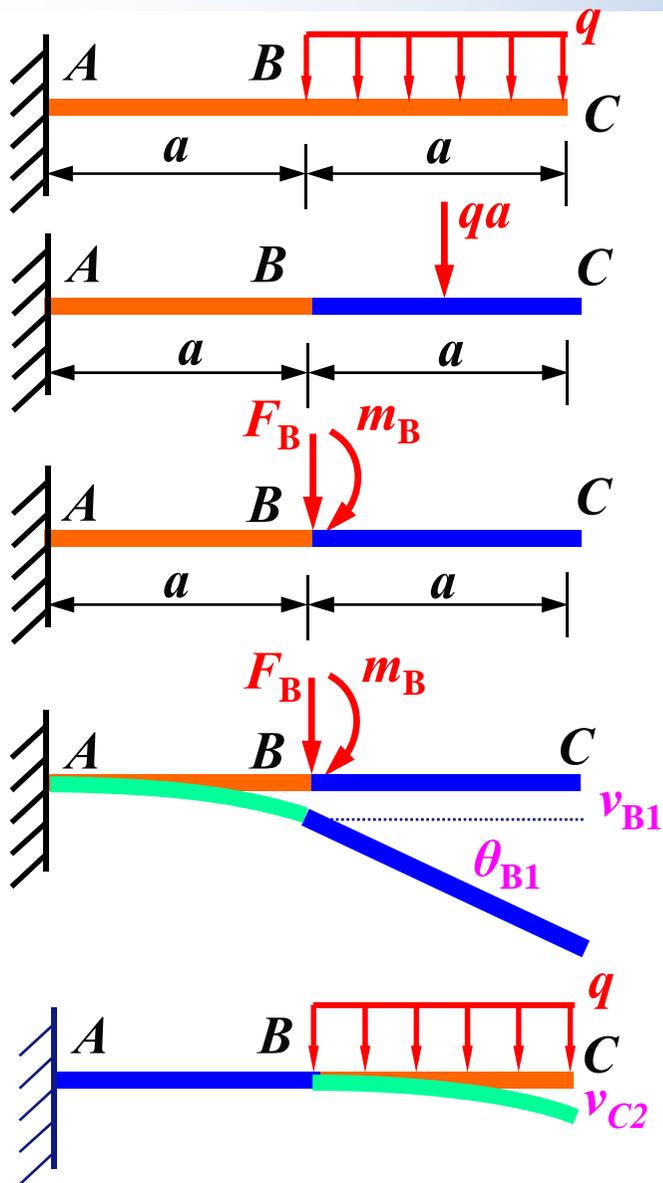
$$v_{B2} = \frac{qa^4}{8EI_z} (\uparrow) \quad \theta_{B2} = \frac{qa^3}{6EI_z} (\curvearrowright)$$

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} =$$

$$= \frac{2qa^4}{EI_z} - \frac{7qa^4}{24EI_z} = \frac{41qa^4}{24EI_z} (\downarrow)$$



## 6-3 查表叠加法



解法二：逐段刚化法

1、先将  $BC$  段刚性，让  $AB$  段变形

$$F_B = qa, \quad m_B = \frac{1}{2}qa^2$$

$$v_{C1} = v_{B1} + \theta_{B1}a$$

$$v_{B1} = \frac{F_B a^3}{3EI_z} + \frac{m_B a^2}{2EI_z} = \frac{7qa^4}{12EI_z} (\downarrow)$$

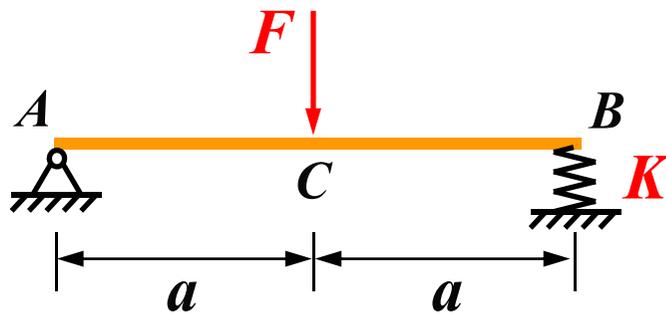
$$\theta_{B1} = \frac{F_B a^2}{2EI_z} + \frac{m_B a}{EI_z} = \frac{qa^3}{EI_z} (\curvearrowright)$$

$$v_{C1} = v_{B1} + \theta_{B1}a = \frac{19qa^4}{12EI_z} (\downarrow)$$

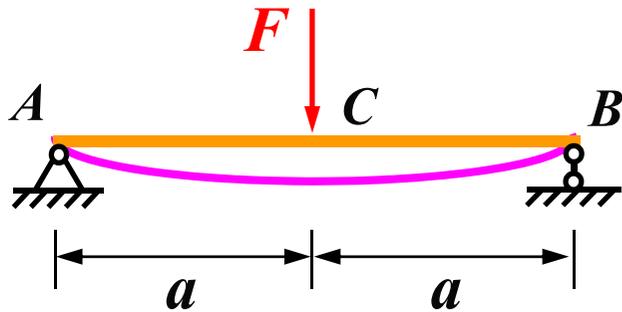
2、再将  $AB$  段刚性，让  $BC$  段变形

$$v_{C2} = \frac{qa^4}{8EI_z} (\downarrow) \quad v_C = v_{C1} + v_{C2} = \frac{41qa^4}{24EI_z} (\downarrow)$$

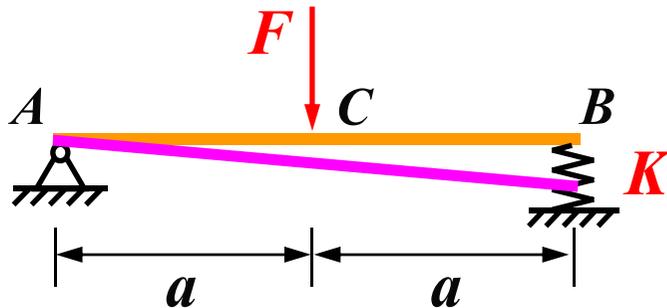
## 6-3 查表叠加法



1



2



例 已知:  $F$ 、 $a$ 、 $K$ 、 $EI$

求:  $v_C$

解: 先将弹簧刚化

$$v_{C1} = \frac{Fa^3}{6EI} (\downarrow)$$

再将  $AB$  梁刚化

$$v_{C2} = \frac{1}{2} \times \frac{F/2}{K} = \frac{F}{4K} (\downarrow)$$

$$\begin{aligned} v_C &= v_{C1} + v_{C2} \\ &= \frac{Fa^3}{6EI} + \frac{F}{4K} (\downarrow) \end{aligned}$$

## 6-3 查表叠加法

例 已知:  $F$ 、 $a$ 、 $EA$ 、 $EI$

求:  $\Delta x_A$  和  $\Delta y_A$

解: 先将  $BC$  刚化:  $\Delta y_{A1} = \frac{Fa^3}{3EI}$  ( $\uparrow$ )

再将  $AB$  刚化:  $\Delta x_{A2} = \frac{Fa^3}{2EI}$  ( $\leftarrow$ )

$$\Delta y_{A2} = \frac{Fa}{EA} + \frac{Fa^2}{EI} \times a \quad (\uparrow)$$

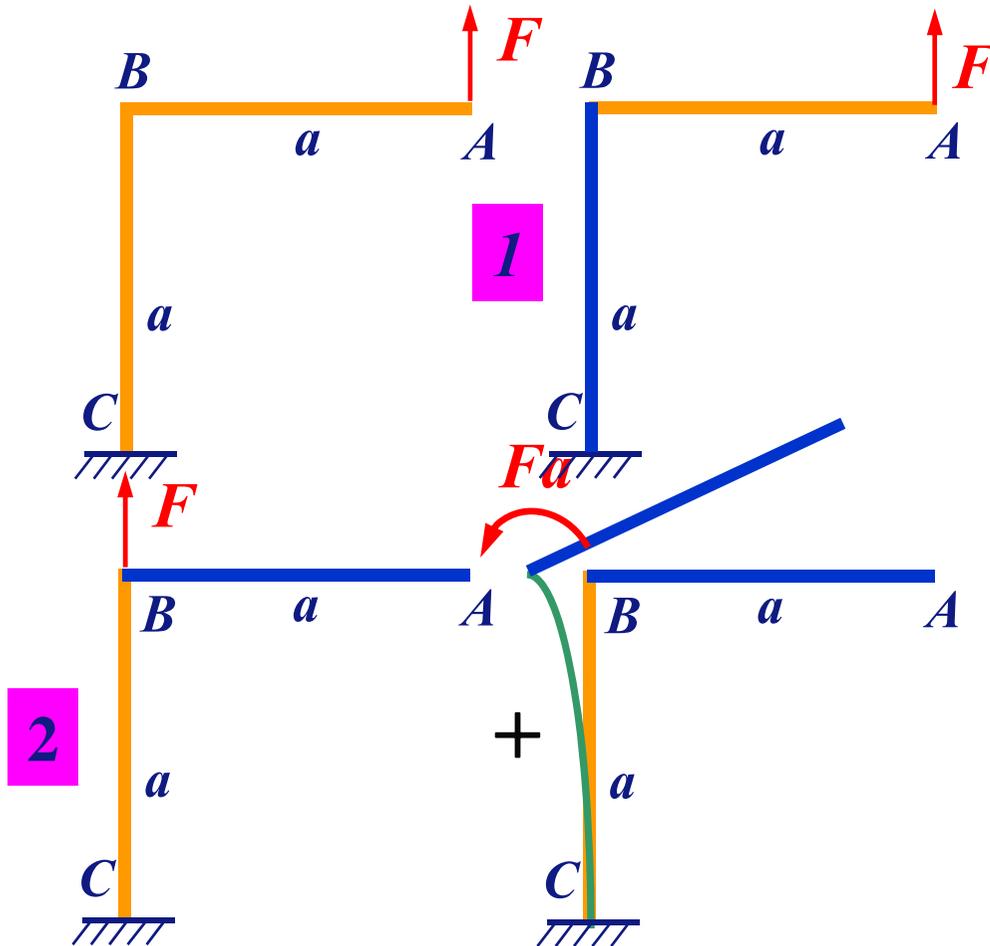
叠加求和:  $\Delta x_A = \frac{Fa^3}{2EI}$  ( $\leftarrow$ )

$$\Delta y_A = \frac{4Fa^3}{3EI} + \frac{Fa}{EA} \quad (\uparrow)$$

$$d \ll a$$

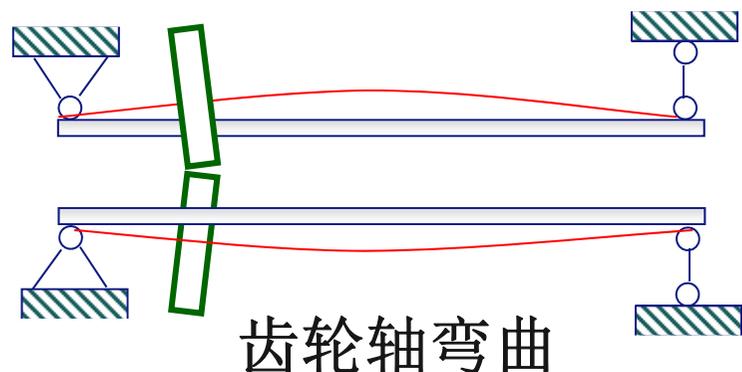
$$\therefore \frac{Fa}{EA} \ll \frac{4Fa^3}{3EI}$$

一般拉压变形相对于弯曲变形, 可忽略。

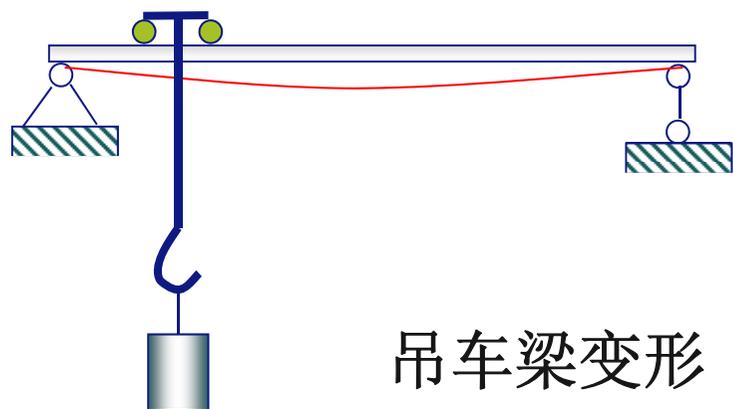


## 6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

### 一、梁的刚度条件：



齿轮轴弯曲变形过大，就要影响齿轮的正常啮合，加速齿轮的**磨损**，产生较大的**噪音**。



吊车梁若变形过大，一方面会使吊车在行驶过程中发生较大的**振动**，另一方面使得吊车出现**下坡**和**爬坡**现象。

所以：要使梁正常安全的工作，一方面梁不仅要满足**强度**条件，另一方面梁还必须满足一定的**刚度**条件。

## 6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

$$v_{\max} \leq [v] \quad [v]: \text{许用挠度}$$

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad [\theta]: \text{许用转角}$$

机床主轴  $[v] = (0.0001 \sim 0.0005)l$

$$[\theta] = (0.001 \sim 0.005)\text{rad}$$

起重机大梁  $[v] = (0.001 \sim 0.005)l$

发动机凸轮轴  $[v] = (0.05 \sim 0.06)\text{mm}$

对于梁的弯曲，强度条件和刚度条件同等重要，一般在梁的设计中，先采用**强度条件**设计梁的截面尺寸，再用**刚度条件**进行校核。

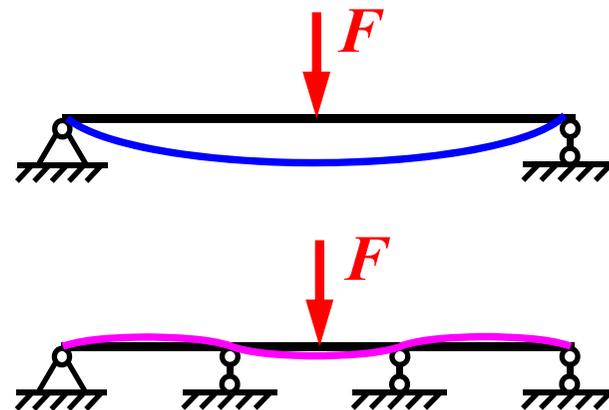
## 6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

### 二、提高弯曲刚度的措施

$$\text{变形} \propto \frac{\text{载荷} \times (\text{跨长})^n}{\text{抗弯刚度}}$$

- 合理安排载荷，改变载荷的作用方式、位置和分布情况，减小弯矩；
- 缩短梁的跨度，或增加支座，是提高梁刚度的最显著方法；

	集中力偶	集中力	均布力
转角 $\propto$	$L$	$L^2$	$L^3$
挠度 $\propto$	$L^2$	$L^3$	$L^4$



- 合理设计截面，提高抗弯刚度  $EI$ 。

## 6-5 变形比较法求解超静定梁

例 求下列超静定梁的支反力。

解：解除C处约束，代之约束力

$$\text{约束条件 } v_C = v_{C1} + v_{C2} = 0$$

物理方程

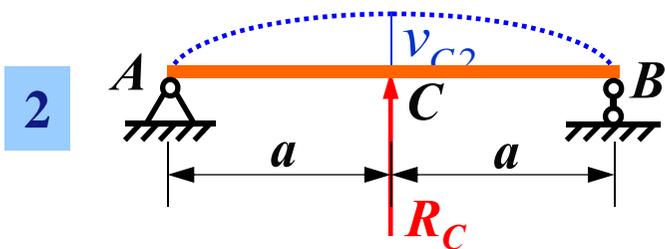
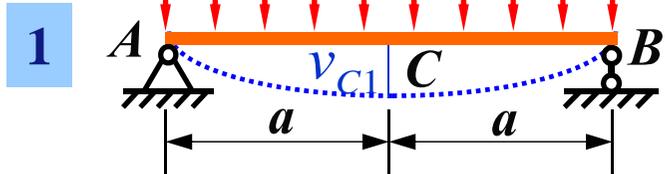
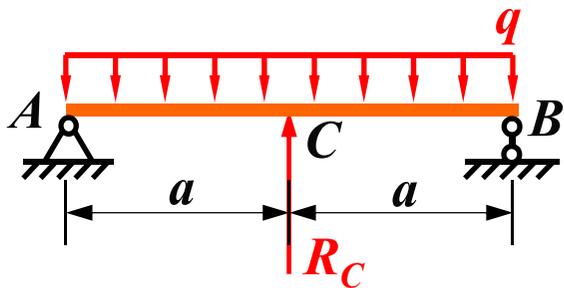
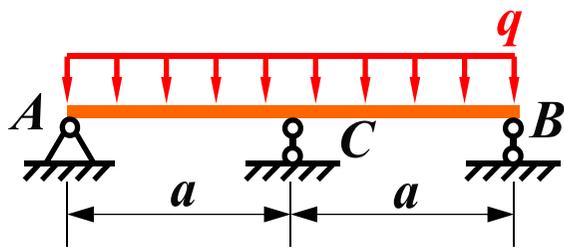
$$v_{C1} = \frac{5q(2a)^4}{384EI_z} = \frac{5qa^4}{24EI_z} (\downarrow)$$

$$v_{C2} = \frac{R_C(2a)^3}{48EI_z} = \frac{R_C a^3}{6EI_z} (\uparrow)$$

$$\text{补充方程 } \frac{5qa^4}{24EI_z} - \frac{R_C a^3}{6EI_z} = 0$$

$$\text{解得 } R_C = 5qa/4 (\uparrow)$$

$$R_A = R_B = 3qa/8 (\uparrow)$$



## 第六章的基本要求

1. 明确挠曲线、挠度、转角等概念，了解梁挠曲线近似微分方程的建立过程；
2. 掌握利用积分法和叠加法计算梁的变形，掌握如何建立梁的刚度条件；
3. 掌握利用变形比较法求解超静定问题；
4. 了解提高弯曲刚度的一些措施。